Комитет образования и науки Волгоградской области
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Волгоградский техникум железнодорожного транспорта и коммуникаций»

Сугак Т.В.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Волгоград 2017

ББК
Авторский знак

Рецензент: *Яблонская Ольга Викторовна, заведующая учебно-методической работой ГАПОУ «ВТЖТиК»;*
Балакан Л.В., методист ГАПОУ «ВТЖТиК»

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета
ГАПОУ «Волгоградский техникум железнодорожного транспорта и коммуникаций».
Протокол от «12» 10.2016 г. №_____
Председатель комиссии Пащенко Е.И.

Сугак, Т.В. методическое пособие по дискретной математике, специальность 43.02.06 сервис на транспорте/Т.В.Сугак. – Волгоград: ВТЖТиК, 2016. – 91 с.

Данное методическое пособие составлено в соответствии с требованиями ФГОС СПО в соответствии с рабочей программой по дисциплине математика, раздел основы дискретной математики. Объем дисциплины рассчитан на 32 часа аудиторных занятий. Целью данной работы является оказание помощи студентам в освоении азов элементов высшей математики и ее применении к решению профессиональных задач.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение		4
1.	Основы дискретной математики	5
1.1	Теория графов	5
1.1.1	Элементы графа	5
1.1.2	Задания к главе	12
1.1.3	Задачи, решаемые с помощью графа	14
1.1.4	Задания к главе	17
1.1.5	Ориентированный граф	18
1.1.6	Задания к главе	21
1.1.7	Способы задания графа	22
1.1.8	Задания к главе	27
1.1.9	Задачи нахождения кратчайшего пути	29
1.1.10	Задания к главе	36
1.1.11	Вопросы к разделу: «Теория графов»	38
1.2	Теория множеств	39
1.2.1	Множество и его элементы	39
1.2.2	Задания к главе	41
1.2.3	Операции над множествами	42
1.2.4	Задания к главе	44
1.2.5	Диаграммы Эйлера-Венна	46
1.2.6	Задания к главе	49
1.2.7	Вопросы к разделу: «Теория множеств»	54
1.3	Элементы логики высказываний	55
1.3.1	Логические операции и таблицы истинности	55
1.3.2	Практическое приложение методов математической логики	60
1.3.3	Задания к главе	65
1.3.4	Вопросы к разделу: «Логика высказываний»	68
2.	Линейная алгебра	69
2.1	Матрицы. Основные понятия. Определитель	69
2.1.1	Задания к главе	74
2.2	Обратная матрица	76
2.2.1	Задания к главе	78
2.3	Арифметичнские действия над матрицей	79
2.3.1	Задания к главе	81
2.4	Решение СЛАУ	82
2.4.1	Решение СЛАУ методом Крамера	82
2.4.2	Решение СЛАУ методом Гаусса	85
2.4.3	Решение СЛАУ методом обратной матрицы	87
2.4.4	Задания к главе	89
2.5	Вопросы к разделу: «Матрицы»	90
3.	Список литературы	91

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся в государственном автономном профессиональном образовательном учреждении «ВТЖТиК» и призвано в форме практических работ организовывать обучение азам дискретной математики, сосредоточить главные усилия студентов на решение прикладных задач с применением знаний дискретной математики. Пособие написано в соответствии с рабочей программой по дисциплине математика, раздела основы дискретной математики. Материал пособия состоит из теоретической части, где определяются основные понятия дискретной математики и методических указаний по решению ситуационных задач. В конце каждой темы предлагаются задания для самостоятельного решения и закрепления пройденного материала. В конце каждого раздела предлагаются вопросы для проверки освоения студентами предлагаемого материала.

1. Основы дискретной математики
1.1. Теория графов
1.1.1 Элементы графа

Годом возникновения теории графов единодушно считается год 1736, когда Леонард Эйлер опубликовал решение так называемой задачи о Кенигсбергских мостах, а также нашел общий критерий существования Эйлерового цикла в графе.

Получение дальнейших существенных результатов в этой области датируются серединой XIX века. Однако начало проведения активных систематических исследований и становления теории графов как отдельного авторитетного раздела современной математики произошло еще почти 100 лет назад, то есть в середине XX века. Именно с этого времени граф становится одной из самых распространенных и популярных математических моделей во многих сферах науки и техники. Картинка в виде набора точек на плоскости и линий, проведенных между некоторыми из них, стала удобной и наглядной форме изображения самых разнообразных объектов, процессов и явлений.

Развитие теории графов в основном обязано большому числу всевозможных приложений. По-видимому, из всех математических объектов графы занимают одно из первых мест в качестве формальных моделей реальных систем. Графы нашли применение практически во всех отраслях научных знаний: физике, биологии, химии, математике, истории, лингвистике, социальных науках, технике и т.п. Наибольшей популярностью теоретико-графовые модели используются при исследовании коммуникационных сетей, информатики, химических и генетических структур, электрических цепей и других систем сетевой структуры. Далее перечислим некоторые типовые задачи теории графов и их приложения:

- Задача о кратчайшей цепи * замена оборудования * составление расписания движения транспортных средств * размещение пунктов скорой помощи * размещение телефонных станций
- Задача о максимальном потоке * анализ пропускной способности коммуникационной сети * организация движения в динамической сети * оптимальный подбор интенсивностей выполнения работ * синтез двухполюсной сети с заданной структурной надежностью * задача о распределении работ
- Задача об упаковках и покрытиях * оптимизация структуры ПЗУ * размещение диспетчерских пунктов городской транспортной сети

Графы и химия. Еще А. Кэли рассмотрел задачу о возможных структурах насыщенных (или предельных) углеводородов, молекулы которых задаются формулой: C_nH_{2n+2} Молекула каждого предельного углеводорода представляет собой дерево. Если удалить все атомы водорода, то оставшиеся атомы углеводорода также будут образовывать дерево, каждая вершина которого имеет степень не выше 4. Следовательно, число возможных структур предельных углеводородов, т. е. число гомологов данного вещества, равно числу деревьев с вершинами степени не больше четырех. Таким образом, подсчет числа гомологов предельных углеводородов также приводит к задаче о перечислении деревьев определенного типа. Эту задачу и ее обобщения рассмотрел Д. Пойа.

Графы и биология. Деревья играют большую роль в биологической теории ветвящихся процессов. Для простоты мы рассмотрим только одну разновидность ветвящихся процессов – размножение бактерий. Предположим, что через определенный промежуток времени каждая бактерия либо делится на две новые, либо погибает. Тогда для потомства одной бактерии мы получим двоичное дерево.

Рассмотрим и решим задачу: в соревнованиях по шашкам участвует шесть человек: Кирилл, Денис, Ольга, Сергей, Полина и Андрей.

Соревнование проводится по круговой системе – каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены:

Кирилл сыграл с Денисом, Сергеем и Андреем;
Денис, как уже говорилось, с Кириллом и еще с Сергеем;
Ольга – с Сергеем, Полиной, Андреем;
Сергей – с Кириллом, Денисом и Ольгой;
Полина – с Ольгой,
а Андрей – с Кириллом и Ольгой.
Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?
Представим данные задачи на чертеже. (рис. 1)

Обозначим участников соревнования точками так, что Кириллу будет соответствовать точка К, Денису – точка Д и т.д. Если двое участников уже сыграли между собой, то соединим изображающие их точки отрезками.

Получили некоторую схему, из которой видно, что число игр, проведенных к настоящему моменту, равно количеству изображенных на ней отрезков, то есть семь.

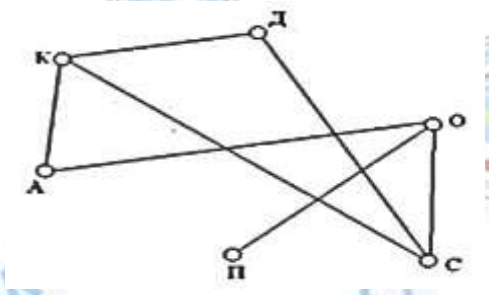


Рис. 1

Чтобы найти число игр, которые осталось провести, соединим пунктирной линией еще не игравших друг с другом участников.

Таких “пунктирных” отрезков получилось восемь, то есть нужно провести еще восемь игр. Кирилл должен сыграть с Ольгой и Полиной, Денис – с Ольгой, Полиной и Андреем и т.д. (рис. 2)

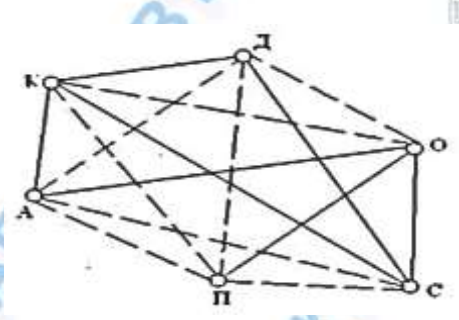


Рис. 2

Есть ли что-нибудь общее у полученных схем? Да.
Они все состоят из точек (кружков), линий (прямых или кривых), соединяющих пары точек.
Эти схемы являются представителями так называемых графов.

Определение: ***Графом*** называется совокупность двух множеств: непустого множества точек (вершин) и множества линий, соединяющих эти точки (ребер).
Представителей графов можно видеть на рис. 3а, 3б, 3в, 3г.

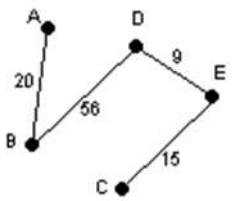


Рис. 3а

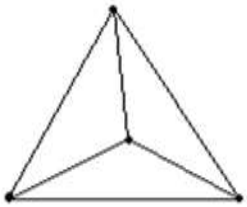


Рис. 3б

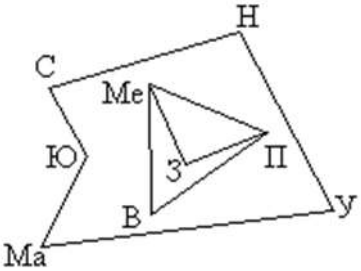


Рис. 3в

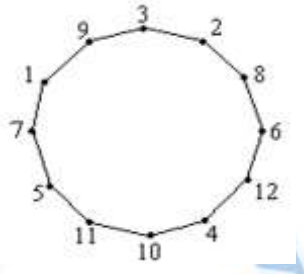


Рис. 3г

Рассмотрим пример:
Граф с вершинами A, B, C, D, E, ребрами (A, B), (B, D), (C, E), (E, D).
20 – вес ребра (A, B),
15 – вес ребра (C, E) и т.д. (рис. 4)

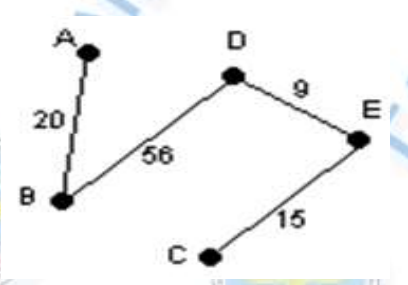


Рис. 4

Вершины графа обычно изображают “жирными” точками, кружками или квадратиками, так как ребра графа иногда пересекаются на чертеже, но точка пересечения при этом не является вершиной.

В данном графе (рис. 5) точка пересечения диагоналей четырехугольника не является вершиной графа.

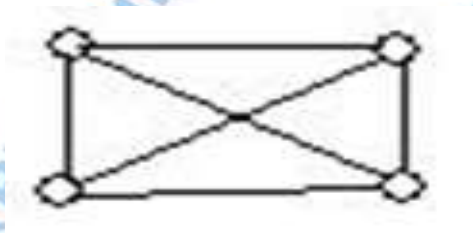


Рис. 5

А в графе (рис. 6) точка пересечения диагоналей четырехугольника является вершиной графа.

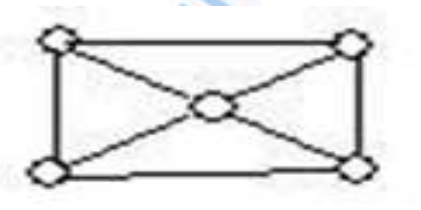


Рис. 6

Определение: ***Вершина*** графа, не принадлежащая ни одному ребру, называется ***изолированной***. (рис. 7)

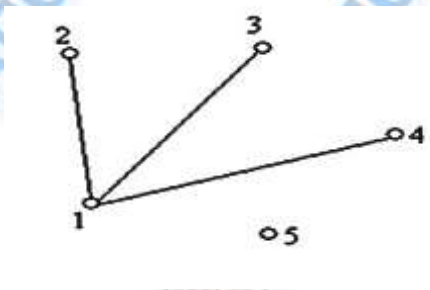


Рис. 7

Вершина 5 на рис. 7 является изолированной.

Задача:

Вершины графа представляют жителей городка N, а ребра, соединяющие две вершины, - тот факт, что эти люди знакомы. Какую ситуацию изображает приведенный на рисунке граф?

Решение.

Все вершины графа являются изолированными, то есть ни одна пара вершин не соединена ребром. Таким образом, все пять жителей не знакомы друг с другом. (рис. 8)

Рис. 8

Определение: ***Вершины*** А или Б графа Г, принадлежащие одному ребру, называются ***висячими***. (рис 9)

Рис. 9

Задача: (рис. 10)
Укажите висячие вершины.
Объясните ответ.
Есть ли здесь изолированные вершины?
Объясните ответ.

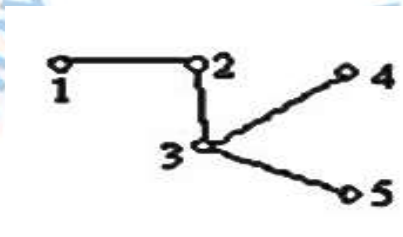
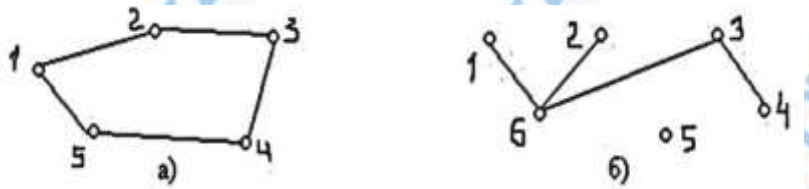


Рис. 10

Ответ: 1, 4, 5 – висячие вершины по определению. Изолированных вершин нет по определению.

Определение ***: Степенью вершины*** А графа Г называется количество ребер графа Г, которым принадлежит данная вершина. Обозначают степень вершины А: d(A). В случае изолированной вершины d(A)=0; для висячей вершины d(A)=1.



В следующих графах (рис. 11а, 11б) найдем степени каждой из вершин.

Рис. 11

Ответ:

а) d(1)=d(2)=d(3)=d(4)=d(5)=2
б) d(1)=d(2)=d(4)=1 – это висячие вершины,
d(5)=0 – это изолированная вершина,

d(3)=2, d(6)=3.

Найдем количество ребер «Р» графа Г и сумму «С» степеней всех его вершин (рис 12а, 12б, 12в, 12г).

Рис. 12а Рис. 12б Рис. 12в Рис. 12г

Ответ:

А) Р=4, С=1+2+3+2=8

Б) Р=5, С=2+3+2+3=10.

В) Р=1, С=1+1+0=2.

Г) Р=7, С=4+3+2+2+3=14.

Теорема:

Сумма степеней вершин графа Г равна удвоенному числу ребер, то есть, где r – число ребер.

$$\sum_{i} \boldsymbol{d(A_i) = 2 \cdot r}$$

Определение: Пусть дан граф Г с вершинами A_1, A_2, …An. ***Путем*** в графе Г называется последовательность ребер (A_1,A_2) (A_2,A_3)…(A_{n-1},A_n). Причем вершина A_1 – называется ***началом пути***, а вершина A_n – ***концом пути***.

Из определения следует, что каждые два соседних ребра пути имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

На рис. 13 (M, B), (B, D), (D, E), (E, C), (C, N) – путь в данном графе из вершины M в вершину N.

M – начало пути; N – конец пути.

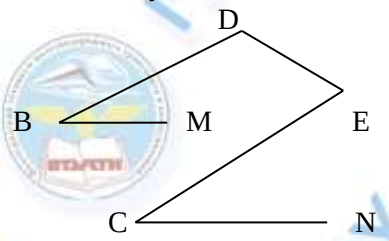


Рис. 13

Задача:

Являются ли путями из вершины 1 в вершину 5 следующие последовательности ребер: (рис. 14)

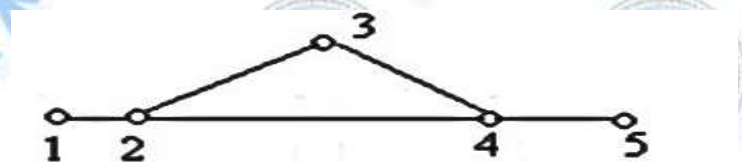


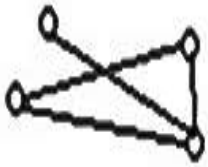
Рис. 14

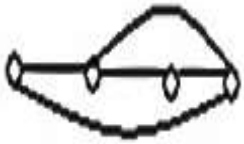
А) (1,2),(3,4),(4,5) – нет, т.к. ребра (1,2) и (3,4) – соседние, но не имеют общей вершины;

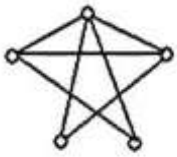
Б) (1,2),(2,3),(3,4) – нет, т.к. эта последовательность не ведет в вершину 5;

В) (1,2),(2,4),(4,3),(3,2),(2,4),(4,5) – нет, т.к. ребро (2,4) повторяется.

Ответ: (1,2),(2,3),(3,4),(4,5) или







(1,2),(2,4),(4,5).

Сравним два полученных в задаче пути.
Очевидно, второй из них короче. Значит можно говорить о длине пути в графе.

Определение: ***Длиной пути*** в графе Г называется количество входящих в этот путь ребер.

Задача: (рис. 15) (M, B), (B, D), (D, E), (E, C), (C, N) – путь в данном графе из вершины M в вершину N. Длина пути равна пяти.

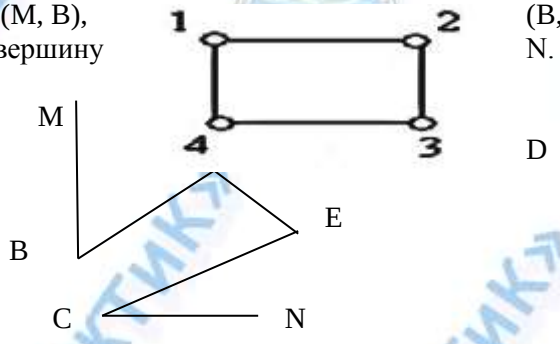


Рис. 15

Задача:
Укажите все пути, соединяющие вершины 1 и 4 в графе, изображенном на рис. 16

Рис. 16

Ответ: (1,4) и (1,2),(2,3),(3,4).

Определение: ***Циклом графа*** называется такой путь в этом графе, у которого начало совпадает с концом. (рис. 17)

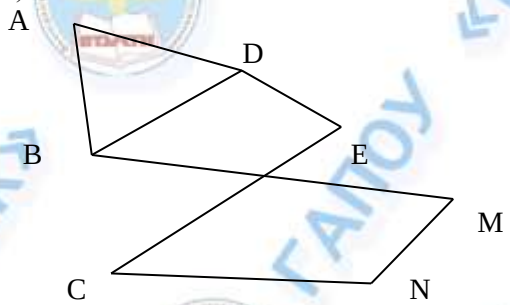


Рис. 17

(M, B), (B, D), (D, E),(E, C), (C, N), (N, M) – цикл в данном графе (рис. 17).
(A, B), (B, D), (D, A) – цикл в данном графе (рис. 17).

Задача: Является ли циклом следующая последовательность ребер (рис. 18):
А) (A,B),(B,E),(E,D),(D,B),(B,A);
Б) (D,E),(E,B),(B,D),(D,C);
В) (D,C),(C,B),(B,E),(E,D);
Г) (B,E),(D,C),(C,B)?

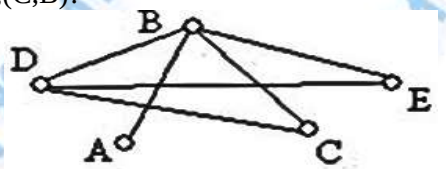


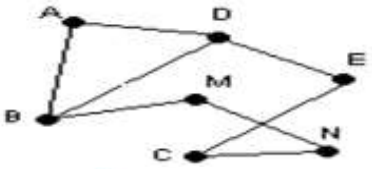
Рис. 18

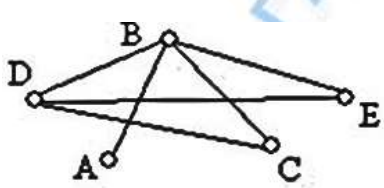
Ответ:
А) нет, т.к. ребро (A,B) повторяется дважды, а значит последовательность – не путь.

Б) нет, т.к. начальная и конечная вершины не совпадают.
В) да, т.к. все условия определения цикла выполнены.
Г) нет, т.к. соседние ребра (B,E) и (D,C) не имеют общей вершины (пропущено ребро (E,D)), а значит последовательность – не путь.

Определение: ***Длиной цикла*** называется количество входящих в него ребер.

Задача: Для каждого из изображенных на рис. 19а, 19б, 19в графов назовем все содержащиеся в них циклы и выберем наибольший и наименьший по длине циклы.





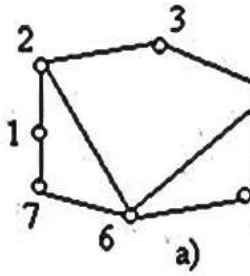


Рис. 19

Ответ:

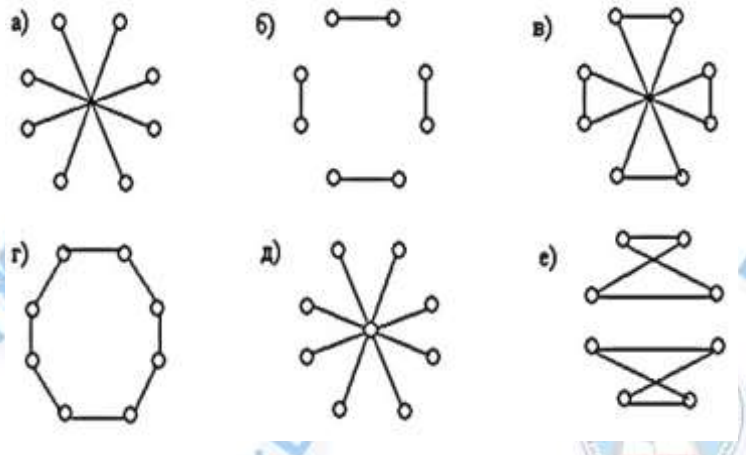
а)
(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,1) - самый длинный цикл;
(1,2),(2,6),(6,7),(7,1);
(2,3),(3,4),(4,6),(6,2);
(1,2),(2,3),(3,4),(4,6),(6,7),(7,1);
(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,2);
(4,5),(5,6),(6,4) – самый короткий цикл;
б) (2,3),(3,5),(5,4),(4,2) – единственный цикл в этом графе;
в) (2,3),(3,5),(5,2) и (2,4),(4,5),(5,2) – самые короткие циклы;
(2,3),(3,5),(5,4),(4,2) – самый длинный цикл.

Определение: ***Граф*** называется ***связным***, если между любыми двумя его вершинами существует путь. В противном случае граф называется несвязным.
Пример связного графа можно увидеть на рис. 20а, 20б.

рис. 20а

рис. 20б

Определение: Две ***вершины*** А и В графа называются ***связными***, если в графе существует путь с концами А и В; если не существует ни одного пути, связывающего их, то вершины называются ***несвязными***.
Из определения следует, что граф является связным, если каждые две его вершины связны, и граф является несвязным, если хотя бы две его вершины несвязны.
Таким образом, чтобы доказать, что граф связный, нужно доказать, что каждые две его вершины являются связными. А чтобы доказать, что граф несвязный – нужно указать в нем две несвязные вершины.



1.1.2 Задания к главе.

Задание 1:

Какие из графов являются связными? Почему? (рис. 1а-е)

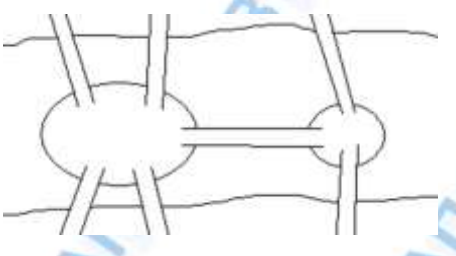


Рис. 1

Задание 2:

Начертите граф, содержащий 4 висячих и две изолированные вершины.

Задание 3:

Начертите граф, содержащий шесть висячих и две изолированные вершины.

Задание 4:

На рис. 2 изображена схема мостов города Кенигсберга.
Можно ли совершить прогулку так, чтобы пройти по каждому мосту ровно 1 раз?

Рис. 2

Задание 5:

В государстве 100 городов, из каждого города выходит 4 дороги.

Сколько всего дорог в государстве?

Задание 6:

Для графа на рис. 3 доказать верность теоремы о сумме степеней вершин графа.

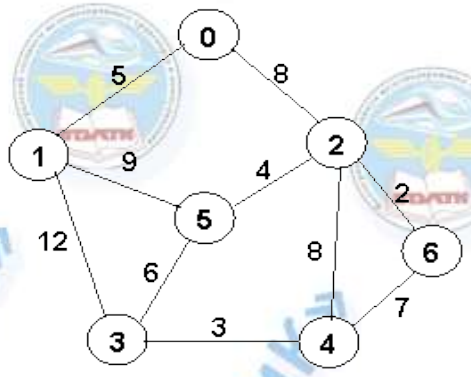


Рис.3

Задание 7:

Для графа на рис. 4 определить:

А) степени вершин, количество ребер

Б) циклы и их длины

В) всевозможные пути от вершины 0 к вершине 6 и длины этих путей

Г) Учитывая вес ребра, определить самый короткий путь из вершины 0 в вершину 4;

Рис. 4

Задание 8: (рис. 5)

- Определить вершины графов и их степени.
- 2. Доказать связь между суммой степеней вершин и количеством ребер в графах.
- 3. указать в графах все возможные пути и их длины.
- 4. Определить наличие висячих и изолированных вершин в графах.

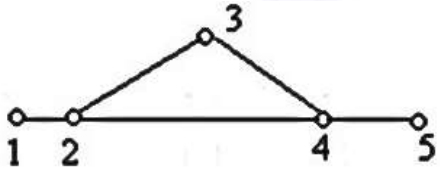


Рис. 5

1.1.3 Задачи, решаемые с помощью графа

Задача 1:

В школьном драматическом кружке решили ставить гоголевского «Ревизора». И тут разгорелся жаркий спор. Всё началось с Ляпкина-Тяпкина.

– Ляпкиным-Тяпкиным буду я! Решительно заявил Дима. С раннего детства я мечтал воплотить этот образ на сцене.

– Ну хорошо, согласен уступить эту роль, если мне дадут сыграть Хлестакова, проявил великодушие Гена.

– … А мне – Осипа, – не уступил ему в великодушии Дима.

– Хочу быть Земляникой или Городничим, – сказал Вова.

– Нет, Городничим буду я, – хором закричали Алик и Боря. – или Хлестаковым, добавили они одновременно.

Удастся ли распределить роли так. Чтобы исполнители были довольны?

Решение:

Изобразим каждого участника драматического кружка точкой, а все их пожелания будем изображать линиями. (рис 1) Видно, что Осипа будет играть Дима, Вова – Землянику, Гена – Ляпкина – Тяпкина, Алик и Боря – Хлестакова и Городничего.

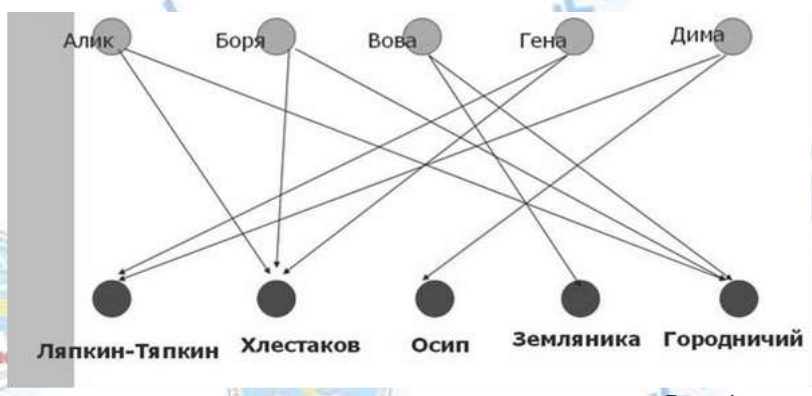


Рис. 1

Задача 2:

В конференции участвовало 5 ученых. Они обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

Решение:

Граф на рис. 2 констатирует факт 10 рукопожатий.

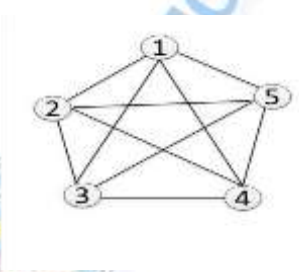


Рис. 2

Задача 3:

На пришкольном участке растут 8 деревьев: яблоня, тополь, береза, рябина, дуб, клен, лиственница и сосна. Рябина выше лиственницы, яблоня выше клена, дуб ниже березы, но выше сосны, сосна выше рябины, береза ниже тополя, а лиственница выше яблони. Расположите деревья от самого низкого к самому высокому.

Решение:

Решение можно изобразить в виде графа на рис. 3

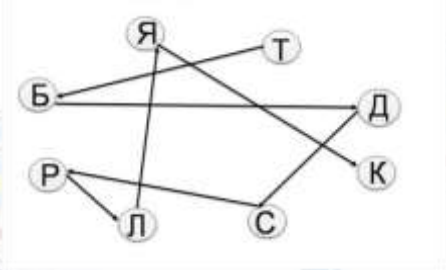


Рис. 3

Задача 4:
У Наташи есть 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная. Сколькими способами Наташа может выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?
Решение:
Смотри рис. 4.

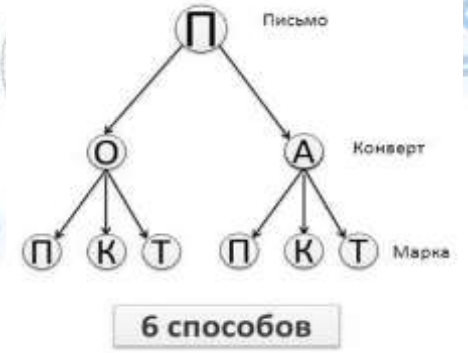


Рис. 4

Задача 5:
На рис . 5 изображена схема соединений, связывающих пункты A,F,G,B,E,C,D. По каждому соединению можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из пункта A в пункт D?

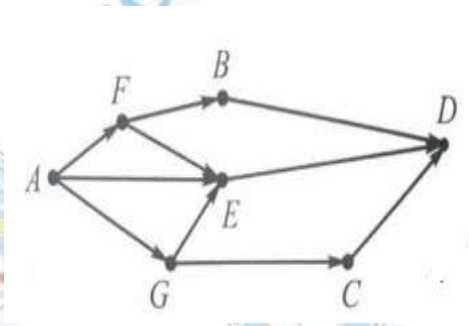


Рис. 5

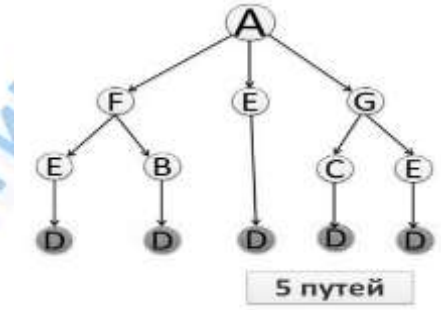


Рис. 6

Решение:
Решение нам дает граф, изображенный на рис. 6.

Задача 6:
Между населенными пунктами A,B,C,D,E построены дороги. Нужно выбрать наикратчайший путь между пунктами A и E. Протяженность дорог между пунктами указана в таб. 1.

	A	B	C	D	E
A		1			
B	1		2	2	7
C		2			3
D		2			4
E		7	3	4	

Таб. 1

Решение:
Строим граф, вершины которого будут пункты A,B,C,D,E. Соединяем их ребром . Каждому ребру устанавливаем его вес из таблицы. И на рис. 7 видно, что самый короткий путь это (A.B) (B,C) (C,E). Длина данного пути равна 6км.

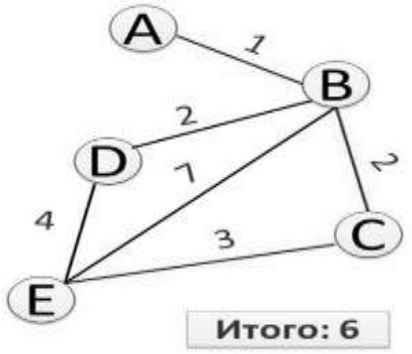


Рис. 7

1.1.4 Задания к главе.

Задание 1

В вершинах графа запиши в клетках все возможные пути превращения числа 777 в число 111».

Задание 2:

Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Венера; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса ?

Задание 3:

На урок в танцкласс пришли слон, волк и лев. Партнершами для них были выбраны мышка, белочка и лисичка. Помогите учителю расставить их в пары, если белочка боится, что ее съест волк, а слон – что он раздавит мышку. Сколько вариантов составления пар есть у учителя танцев? Перечислите их.

Задание 4:

Винни-Пух решил навестить своих друзей: Пятачка, Кролика и Иа-Иа. Ему обязательно нужно побывать у каждого из своих друзей и вернуться домой. Если он к кому-то не зайдет, то его друг обидится. На Винни-Пух не любит длинных путешествий. Определите для него кратчайший путь, если известны расстояния между домиками:

Винни-Пух – Кролик – 60
Иа-Иа – Пятачок – 55
Иа-Иа - Винни-Пух – 30
Винни-Пух - Пятачок – 40
Кролик – Пятачок - 50
Кролик – Иа-Иа – 45

Задание 5:

В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

1.1.5 Ориентированный граф

Определение: Если ребро графа соединяет две его вершины, то говорят, что это ***ребро*** им ***инцидентно.***
Определение: Две ***вершины*** графа называются ***смежными***, если существует инцидентное им ребро, т. е. ребро их соединяющее.
Определение: Два ***ребра*** называются ***смежными***, если они имеют общую вершину.
На рис. 1 смежными являются вершины A и B, A и C. Смежными являются ребра c и d, a и b.

А еще?

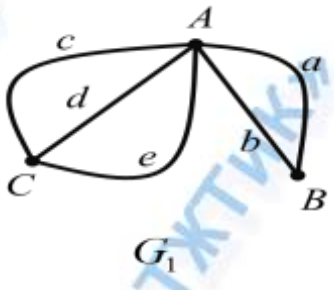


Рис. 1

Определение: Ребро, у которого начало и конец совпадают, называется петлей. (рис. 2)

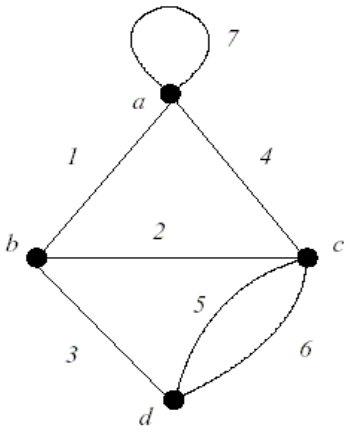


Рис. 2

Ребро под номером 7 и есть петля.
Определение: Если вершине инцедентна петля, она дает вклад в степень вершины, равной двум. d(a)=4 (рис. 2).
Вершина называется четной (нечетной), если ее степень – четное(нечетное) число.
Теорема:
Число нечетных вершин любого графа – четно.
Следствие:
Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

Свойства графа:

1. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком (т.е. не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии) начертить граф. При этом движение можно начать с любой вершины и окончить в той же вершине.
2. Граф с двумя нечетными вершинами тоже можно начертить одним росчерком. Движение надо начинать от любой нечетной вершины, а заканчивать на другой нечетной вершине. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Задача:
Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз? (рис. 3)

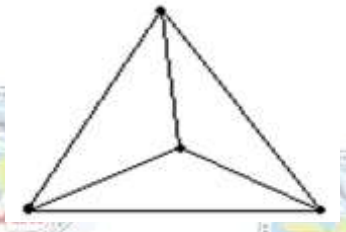


Рис. 3

Ответ: Нет. Т. к. данный граф имеет четыре нечетные вершины, что противоречит свойству графа.
Задача:
В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей ?
Ответ: **Нет** (теорема о четности числа нечетных вершин: число нечетных вершин любого графа – четно).
Определение: Граф, ребра которого имеют направление, называется ориентированным или орграф.
На рис. 4 изображен орграф. Ребра r,s,t,u имеют направление и часто назаваются дугами. Для дуги r вершина А – начало дуги, а вершина В – конец дуги.
Определение: Степенью входа (выхода) вершины орграфа называется число ребер, для которых эта вершина является концом (началом).

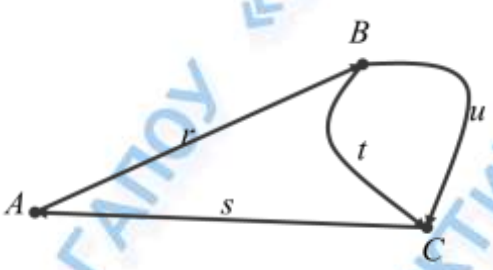


Рис. 4

Степени входа(количество входящих ребер) вершин орграфа обозначаются:

$$d_+(A) = 1$$
$$d_+(B) = 1$$
$$d_+(C) = 2$$

Степень выхода(количество выходящих ребер) вершин орграфа обозначается:

$$d_-(A) = 1$$
$$d_-(\mathrm{B}) = 2$$
$$d_-(\mathrm{C}) = 1$$

Задача:
Для орграфа определить связность вершин (рис. 5)

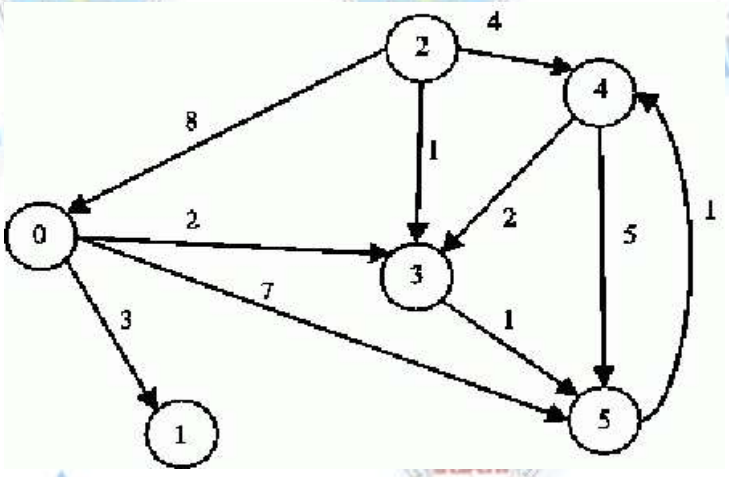


Рис. 5

Решение:
Ставим
Формируем таблицу, у которой строки и столбцы – номера вершин. Ставим в клеточках таблицы «1» – если вершины связные и «0» – если вершины не связные . (таб. 1)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	1	0	1	1
4	0	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	1	0

Таб. 1

Задача:
1. определить название графа (рис. 6)
2. определить степени входа и выхода вершин
3. составить таблицу связности вершин.

Решение:
1. На рис. 6 изображен орграф, т.к. его ребра имеют направление.
2. Степени входа: $d_+(1) = 1$; $d_+(2) = 1$; $d_+(3) = 2$; $d_+(4) = 2$;
   Степени выхода: $d_-(1) = 2$; $d_-(2) = 2$; $d_-(3) = 1$; $d_-(4) = 2$;
3. Таблица связности для графа (таб. 2):

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0

Таб. 2

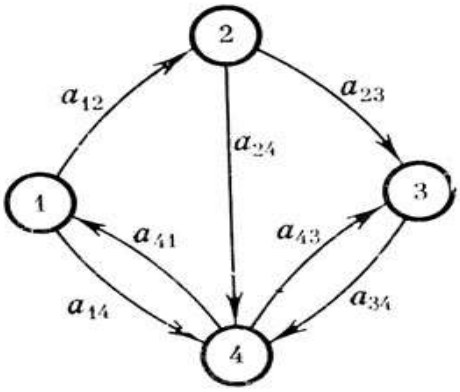


Рис. 6

1.1.6 Задания к главе.

Задание 1:

На рис. 1а для графа определить степень вершин, а на рис. 1б определить степени входа и выхода вершин орграфа.

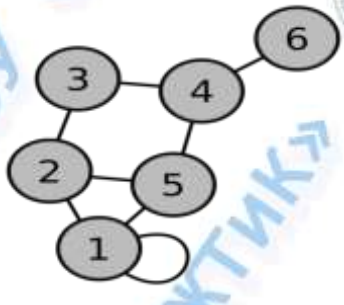


Рис. 1а

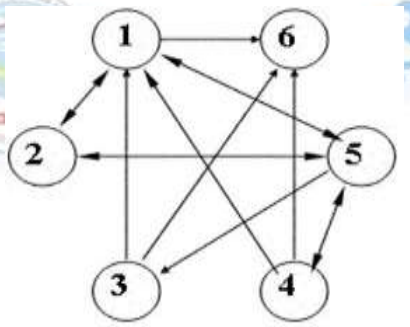
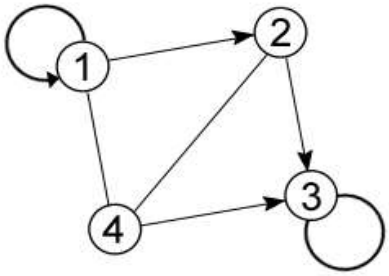


рис. 1б

Задание 2:

1. Оформить таблицы связности вершин для графов, изображенных на рис. 2а, 2б.
2. Определить степени входа и выхода вершин.



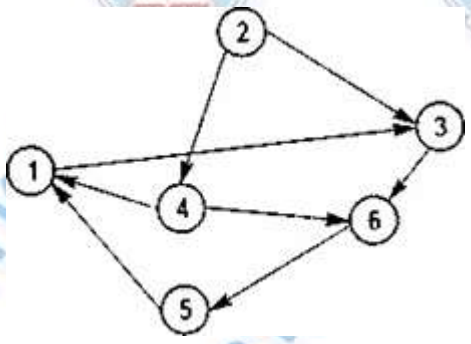


Рис. 2а

Рис. 2б

Задание 3:

Записать смежные ребра для графа на рис. 3

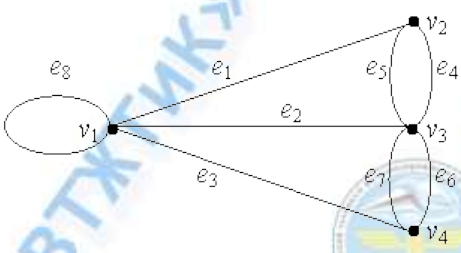


рис. 3

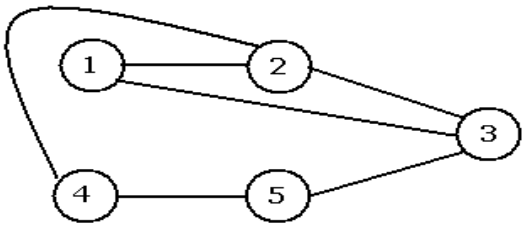


Рис. 4

Задание 4:

Можно ли нарисовать заданный на рис. 4 граф, не отрывая карандаш?

Задание 5:

В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими ?

Задание 6:

В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

1.1.7 Способы задания графа.

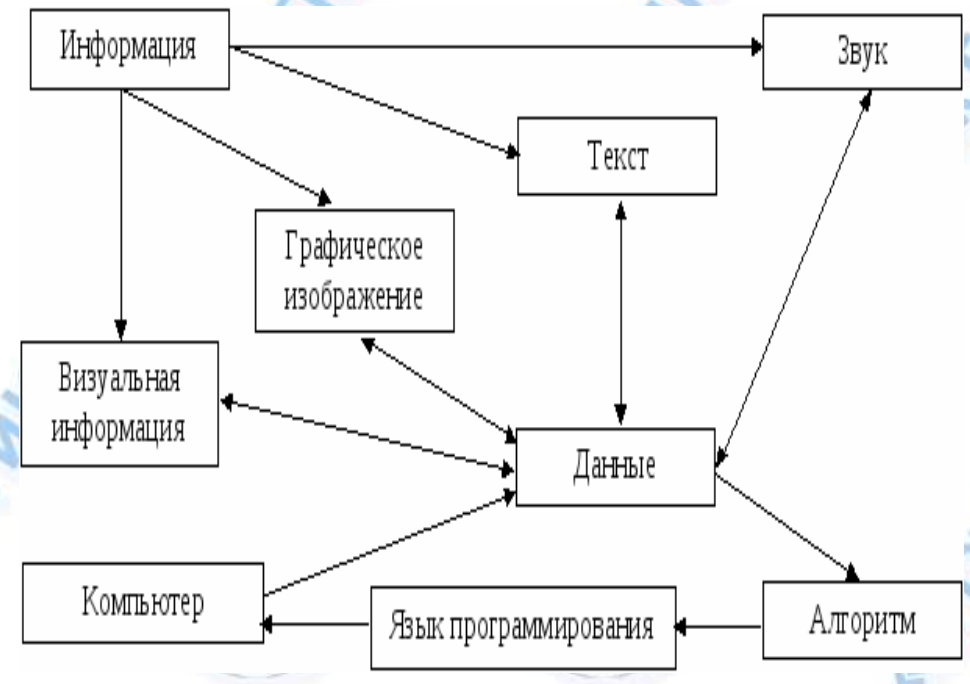
Существует два способа задания графа:

1. Графический или геометрический.
2. Аналитический.

1. Графический.

Преимущества:

1. наглядность всех элементов графа, что позволяет быстро визуально анализировать его строение. Это явное превосходство метода предопределило его широкое использование.
2. Сферам применения графов связаны с передачей какой-то информации большому числу людей. Например, схемы движений различных видов транспорта,



эвакуации людей из помещений в чрезвычайных ситуациях, размещения экспозиций выставок и т.д. даются только в графическом виде, иначе их не сможет воспринять большая масса народа, что, неизбежно, создаст очевидные проблемы.

Недостатки:

1. Громоздкость
2. Трудность машинного восприятия. Второе особенно важно при обработке графа с помощью ЭВМ. Это в первую очередь относится к задачам управления различными отраслями народного хозяйства страны.

Рассмотрим примеры графического изображения графа.

На рис. 1и рис. 2 изображены примеры орграфов.

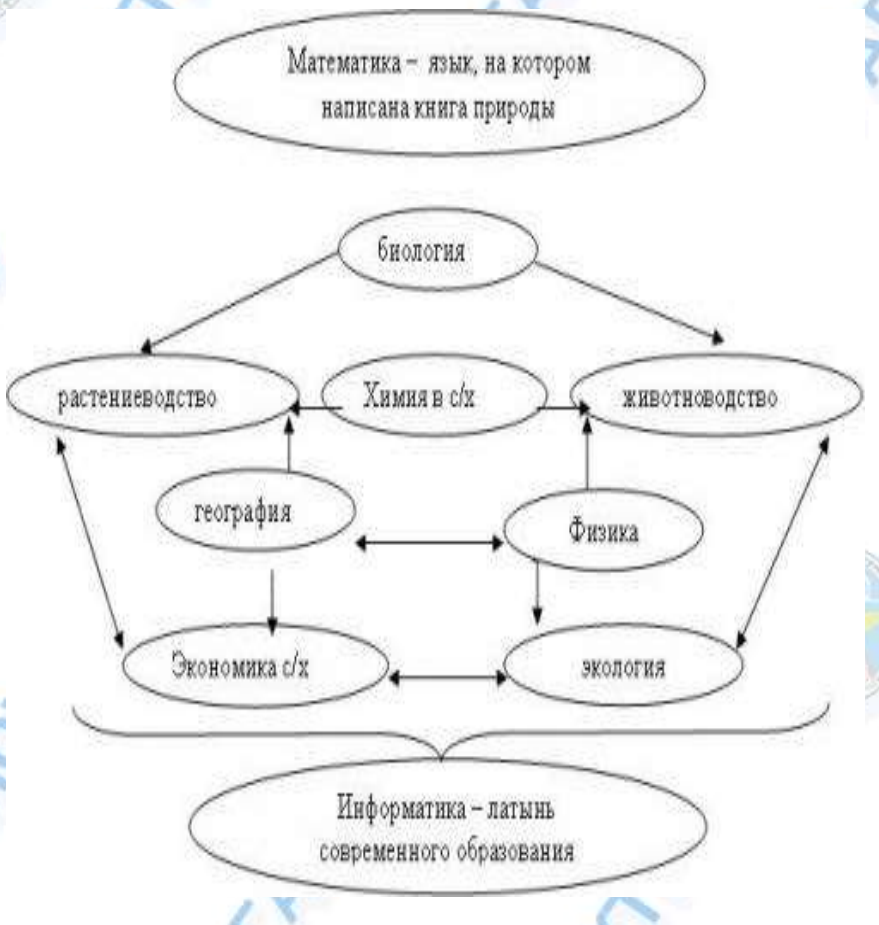


рис. 1

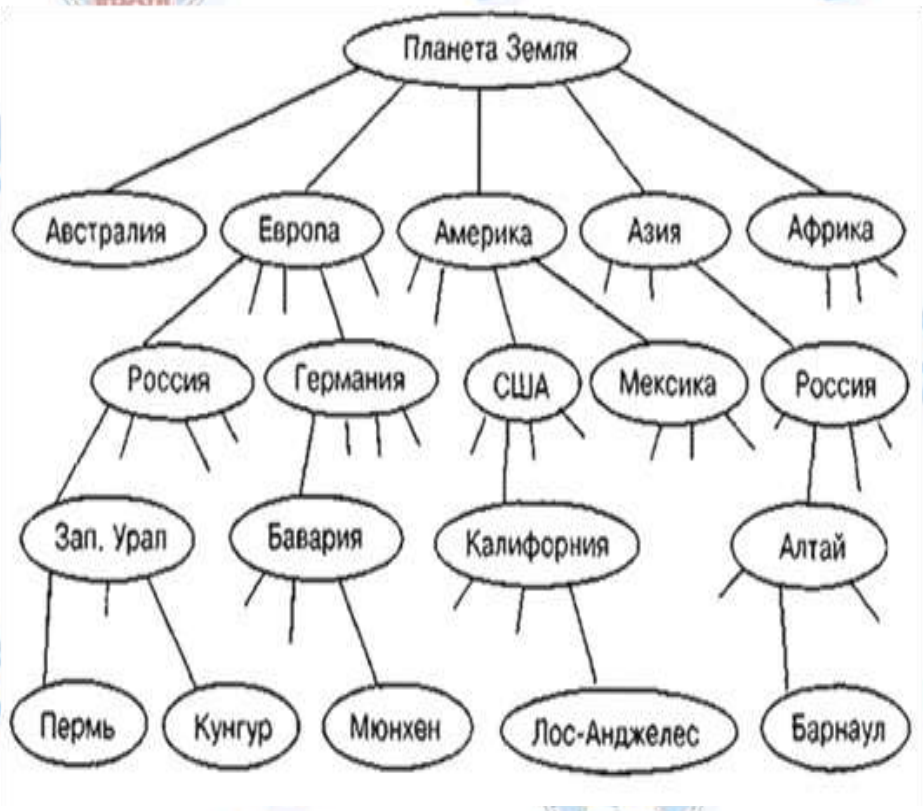


Рис. 2

На рис. 3 изображен граф в виде иерархического дерева.

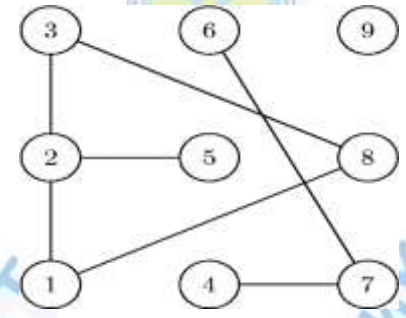


Рис. 3

2.Аналитический.

1. Аналитический в виде перечня подмножеств вершин. (рис. 4)

Рис. 4

Пусть неориентированный граф имеет 9 вершин. Рассмотрим подмножество Т(п), каждое из которых содержит вершины, имеющие связь с другими вершинами. Т(п) может содержать и саму вершину, что говорит о наличии петли. Возможен случай i- кратного повторения какой-то вершины п. Это бывает в тех случаях, когда ребро, связывающее вершины п и к, является множественным. Записываются Т(п) в порядке вершин. Совокупность всех Т(п) и задают неориентированный граф.

Т(1)=(2,8); Т(2)=(1,3,5); Т(3)=(2,8); Т(4)=(7); Т(5)=(2); Т(6)=(7); Т(7)=(4,6); Т(8)=(1,3); Т(9)=∅

2.Аналитический с помощью матрицы инцидентности.

Понятия смежности и инцидентности.

Если вершина является концом ребра (у ребра 2 конца), то говорят, что ребро и вершина инцидентны. Инцидентность – это отношение между разнородными объектами (вершинами и рёбрами). При рассмотрении орграфов различают положительную инцидентность (дуга исходит из вершины) и отрицательную инцидентность (дуга входит в вершину).

В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершины с вершинами или ребра с рёбрами).

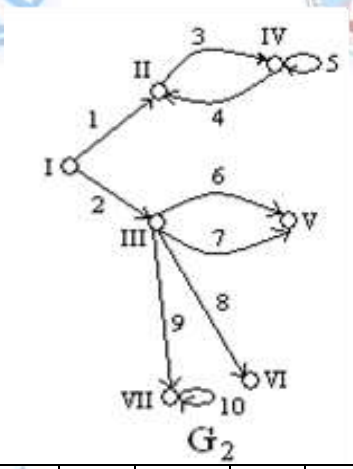
Определение: Назовём матрицей инцидентности таблицу , состоящую из N строк (вершины) и M столбцов (рёбра или дуги).

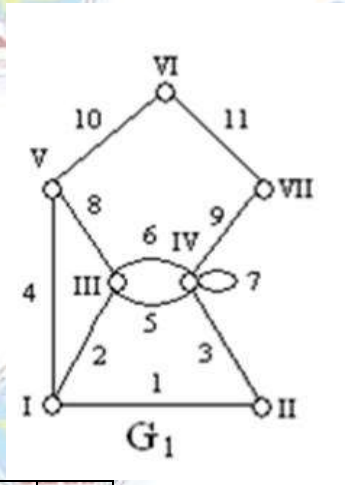
Для неориентированного графа:
Элемент таблицы = **1**, если вершина инцидентна ребру;
Элемент таблицы = **0**, если вершина не инцидентна ребру ;
Для орграфа:
Элемент таблицы = **1**, если вершина является началом дуги;
Элемент таблицы = **0**, если вершина не инцидентна дуге;
Элемент таблицы = **– 1**, если вершина является концом дуги.
Задача:
Построить матрицу инцидентности для графов (рис.5а, 5б).

Рис. 5а Рис. 5б

Решение:
Для графа (рис. 5а) строим таблицу инцидентности, у которой строки – вершины (их будет 7), а столбцы – дуги (их будет 10). Итак, первая строка таблицы: Дуга №1 в вершине I начинается, следовательно, ставим «1». Дуга №2 в вершине I начинается, следовательно, ставим «1». Дуга №3 не имеет никакого отношения к вершине I, следовательно, ставим «0». И так далее.
Вторая строка таблицы: Дуга №1 входит в вершину II, следовательно, ставим «-1». Дуги №2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 не связаны с вершиной II, следовательно, в таблице ставим «0». Дуга №3 в вершине II начинается, следовательно, ставим «1», а дуга №4 является концом для вершины II, следовательно, ставим «-1». И так далее. Таблица инцидентности заполнена (таб. 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
II	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
III	0	-1	0	0	0	1	1	1	1	0
IV	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0





V	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0

VI	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Таб. 1

Для графа (рис. 5б) строим таблицу инцидентности, у которой строки – вершины (их будет 7), а столбцы – ребра (их будет 11) (таб. 2). Итак, первая строка таблицы: Ребра №1, 2, 4 привязаны к вершине I , следовательно, ставим «1». Остальные ребра №3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11к вершине I не имеют никакого отношения, следовательно, ставим «0». Вторая строка таблицы: Ребра №1, 3 привязаны к вершине II, следовательно, ставим «1». Ребра №2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 не связаны с вершиной II, следовательно, в таблице ставим «0». И так далее. Таблица инцидентности заполнена (таб. 2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
II	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
III	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
IV	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
V	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Таб. 2

3. Аналитический с помощью матрицы смежности.

Определение: Матрицей смежности графа Г с N вершинами называется матрица A=(aij) NxN , в которой элемент aij равен числу дуг (рёбер), идущих из pi вершины в pj вершину.

Задача:

Построить матрицу смежности для ориентированного графа (рис. 6).

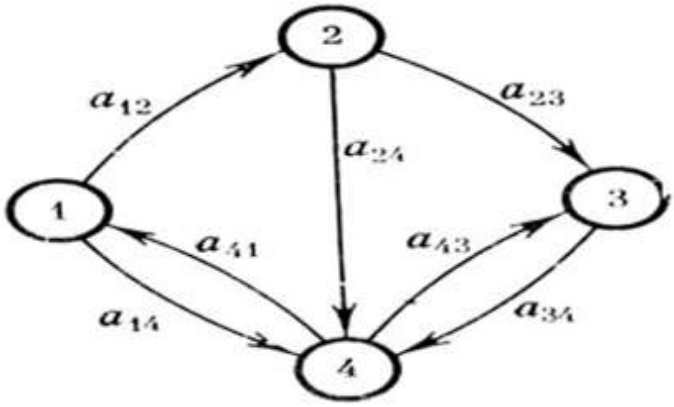


Рис. 6

Решение:

Строим таблицу смежности, у которой число строк и столбцов определяется количеством вершин (четыре) (таб. 3). Заполняем первую строку: Вершина №1 не связана сама с собой(петли нет) и не связана с вершиной №3,следовательно дуг нет и ставим «0». Из вершины №1 к вершине №2 выходит одна дуга и к вершине №4 выходит одна дуга, следовательно, ставим по «1». И так далее.

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0

Таб. 3

Задача:

Построить матрицу смежности для неориентированного графа (рис. 7).

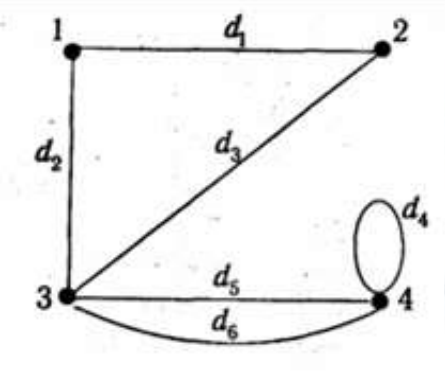


рис. 7

Решение:

Строим таблицу, у которой количество строк и столбцов это число вершин (четыре) (таб. 4). И заполняем. Вершина №3 и №4 связаны 2 ребрами, следовательно на пересечение строки для третьей вершины и столбца для четвертой вершины поставим «2»(два ребра). Вершина №4 имеет петлю, которая дает вклад как 2 ребра, следовательно, на пересечении строки и столбца для вершины №4 ставим «2». И так далее. Таблица готова (таб. 4).

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	2
4	0	0	2	2

Таб. 4

1.1.8 Задания к главе.

Задание 1:

Изобразить графы (рис. 1) тремя аналитическими способами.

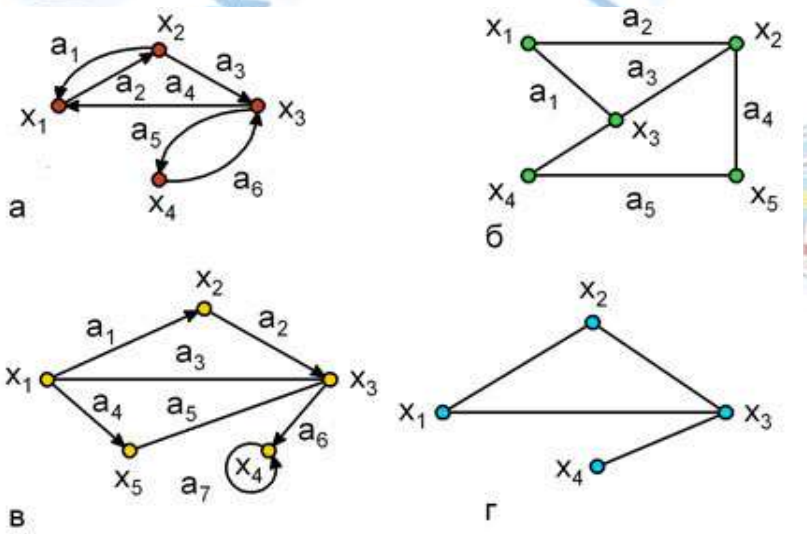


рис. 1

Задание 2:

Для неориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

А) восстановить графическое представление графа

Б) Указать степени вершин графа

В) Определить всевозможные пути из вершины №2 к вершине №5 и их длины

Задание 3:

Для ориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

А) Восстановить графическое представление графа.

Б) Определить степени входа и выхода вершин графа.

Задание 4:

Для графа представленного следующей матрицей смежности, определить матрицу инцидентности и изобразить его графически.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание 5:

Для графа представленного следующей матрицей инцидентности, определить матрицу смежности и изобразить его графически.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Задание6:

Для неориентированного графа (рис. 2)

1) построить матрицу смежности;
2) указать степени вершин графа;
3) найти длины маршрутов из вершины №2 в вершину №5 , составить маршруты длины 5;
4) построить простой цикл, содержащий вершину №4.

рис. 2

Задание 7:

Для ориентированного графа (рис. 3)

1) построить матрицу смежности;
2) построить матрицу инцидентности;
3) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа.

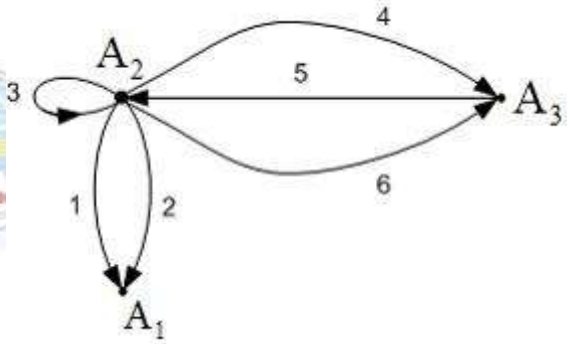


Рис. 3

1.1.9 Задачи нахождения кратчайшего пути

Построение математической модели алгоритмом Дейкстры:

Описываемый в данном разделе алгоритм позволяет находить в графе кратчайший путь между двумя выделенными вершинами s и t при положительных длинах дуг. Этот алгоритм, предложенный в 1959 г. Дейкстрой, считается одним из наиболее эффективных алгоритмов решения задачи.

Главная идея, лежащая в основе алгоритма Дейкстры, предельно проста. Предположим, что нам известны m вершин, ближайших к вершине s (близость любой вершины x к вершине s определяется длиной кратчайшего пути, ведущего из s в x). Пусть также известны сами кратчайшие пути, соединяющие вершину s с выделенными m вершинами). Покажем теперь, как может быть определена (m + 1) – я ближайшая к s вершина.

Окрасим вершину s и m ближайших к ней вершин. Построим для каждой неокрашенной вершины y пути, непосредственно соединяющие с помощью дуг (x, y) каждую окрашенную вершину x с y. Выберем из этих путей кратчайший, и будем считать его условно кратчайшим путем из вершины s в вершину y.

Какая же из неокрашенных вершин является (m + 1) – й ближайшей к s вершиной? Та, для которой условно кратчайший путь имеет наименьшую длину. Это обусловливается тем, что кратчайший путь из вершины s в (m +1) – ю ближайшую вершину при положительном значении длин всех дуг должен содержать в качестве промежуточных лишь окрашенные вершины, т.е. вершины, входящие в число m вершин, ближайших к вершине s.

Итак, если известны m ближайших к s вершин, то (m + 1) – я ближайшая к s вершина может быть найдена так, как это описано выше. Начиная с m = 0, описанная процедура может повторяться до тех пор, пока не будет получен кратчайший путь, ведущий из вершины s к вершине t.

Описание метода решения задач:

Каждой вершине X в ходе алгоритма присваивается число d(x), равное длине кратчайшего пути из вершины S в вершину X и включающем только окрашенные вершины. Положить d(s)=0 и d(x)=∞ для всех остальных вершин графа. Окрашиваем вершину S и полагаем y=S, где y – последняя окрашенная вершина.

Для каждой неокрашенной вершины X пересчитывается величина d(x) по следующей формуле:

$d(x)=\min \{d(x); d(y)+ a_{y,x}\}$ (1)

Если d(x)=∞ для всех неокрашенных вершин, то алгоритм заканчивается т.к. отсутствуют пути из вершины S в неокрашенные вершины. Иначе окрашивается та вершина, для которой величина d(x) является минимальной. Окрашивается и дуга, ведущая в эту вершину в соответствии с выражением (1) и полагаем y=x.

Если y=t, кратчайший путь из s в t найден. Иначе переходим к шагу 2.

Каждый раз окрашивается вершина и дуга, заходящая в эту вершину. Окрашенные дуги не могут образовывать цикл, а образуют в исходном графе дерево с корнем (началом) в вершине s. Это дерево называют ориентированным деревом кратчайших путей. Путь из s в t принадлежит этому дереву. При поиске одного кратчайшего пути процедура наращивания завершается при достижении конечной вершины этого пути. Нам же необходимо получить все кратчайшие пути начинающиеся в вершине №1. Для этого процедуру наращивания ориентированного дерева продолжается до тех пор, пока все вершины не будут включены. Таким образом, мы получаем ориентированное дерево кратчайших путей, которое является покрывающим деревом графа.

Иногда в графе имеются несколько кратчайших путей. Кратчайший путь будет единственным, если в алгоритме ни разу не возникает неоднозначность при окрашивании дуги.

Главным условием успешного применения алгоритма Дейкстры к задаче на графе является неотрицательность длин дуг этого графа.

Задача:

Необходимо найти все кратчайшие пути от вершины №1 для графа, представленого на рис. 1

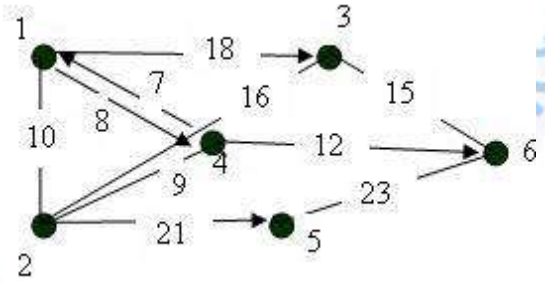


Рис. 1

Решение:

Составим матрицу длин дуг для данного графа (таб. 1).

∞	10	18	8	∞	∞
10	∞	16	9	21	∞
∞	16	∞	∞	15	∞
7	9	∞	∞	∞	12
∞	∞	∞	∞	∞	23
∞	∞	15	∞	23	∞

Таб. 1

Стартовая вершина, от которой строится дерево кратчайших путей – вершина 1.

Задаем стартовые условия: d(1)=0, d(x)=∞

Окрашиваем вершину 1, y=1.

Находим ближайшую вершину к окрашенной нами, используя формулу: $d(x)=\min\{d(x); d(y)+a_{y,x}\}$

d(2)=min {d(2); d(1)+a (1,2)}=min {∞; 0+10}=10

d(3)=min {d(3); d(1)+a (1,3)}=min {∞; 0+18}=18

d(4)=min {d(4); d(1)+a (1,4)}=min {∞; 0+8}=8

d(5)=min {d(5); d(1)+a (1,5)}=min {∞; 0+∞}=∞

d(6)=min {d(6); d(1)+a (1,6)}=min {∞; 0+∞}=∞

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 4 d(4)=8. Включаем вершину №4 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,4)

d(2)=min {d(2); d(4)+a (4,2)}=min {10; 8+9}=10

d(3)=min {d(3); d(4)+a (4,3)}=min {18; 8+∞}=18

d(5)=min {d(5); d(4)+a (4,5)}=min {∞; 8+∞}=∞

d(6)=min {d(6); d(4)+a (4,6)}=min {∞; 8+12}=20

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 2 d(2)=10. Включаем вершину №2 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,2)

d(3)=min {d(3); d(2)+a (2,3)}=min {18; 10+16}=18

d(5)=min {d(5); d(2)+a (2,5)}=min {∞; 10+21}=31

d(6)=min {d(6); d(2)+a (2,6)}=min {20; 10+∞}=20

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 3 d(3)=18. Включаем вершину №3 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,3)

d(5)=min {d(5); d(3)+a (3,5)}=min {31; 18+15}=31

d(6)=min {d(6); d(3)+a (3,6)}=min {20; 18+∞}=20

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 6 d(6)=20. Включаем вершину №6 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (4,6)

d(5)=min {d(5); d(6)+a (6,5)}=min {31; 20+23}=31

Минимальную длину имеет путь от вершины 1 до вершины 5 d(5)=31. Включаем вершину №5 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (2,5)

Мы получили ориентированное дерево кратчайших путей начинающихся в вершине №1 для исходного графа.

d(1)=1 Длина маршрута L=0

d(2)=1–2 Длина маршрута L=10

d(3)=1–3 Длина маршрута L=18

d(4)=1–4 Длина маршрута L=8

d(5)=1–2–5 Длина маршрута L=31

d(6)=1–4–6 Длина маршрута L=20

Ориентированное дерево с корнем в вершине №1(рис. 2):

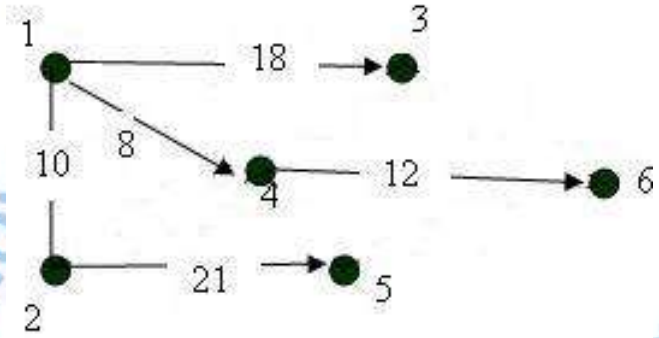


Рис. 2

Задача:

Дан граф для нахождения минимального пути от вершины 0 до всех остальных (рис. 3).

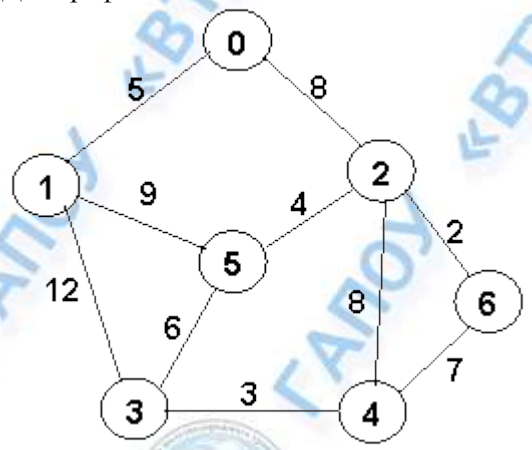


Рис. 3

Решение:

Представим граф, в виде матрицы длин дуг. Строим таблицу (таб. 2).

	0	1	2	3	4	5	6
0	∞	5	8	∞	∞	∞	∞
1	5	∞	∞	12	∞	9	∞
2	8	∞	∞	∞	8	4	2
3	∞	12	∞	∞	3	6	∞
4	∞	∞	8	3	∞	∞	7
5	∞	9	4	6	∞	∞	∞
6	∞	∞	2	∞	7	∞	∞

Таб. 2

Стартовая вершина, от которой строится дерево кратчайших путей – вершина 0.

Задаем стартовые условия: d(0)=0, d(x)=∞

Окрашиваем вершину 0, y=0.

Находим ближайшую вершину к окрашенной нами, используя формулу: $d(x)=\min\{d(x); d(y)+a_{y,x}\}$

d(1)=min {d(1); d(0)+a (0,1)}=min {∞; 0+5}=5

d(2)=min {d(2); d(0)+a (0,2)}=min {∞; 0+8}=8

d(3)=min {d(3); d(0)+a (0,3)}=min {∞; 0+∞}=∞

d(4)=min {d(4); d(0)+a (0,4)}=min {∞; 0+∞}=∞

d(5)=min {d(5); d(0)+a (0,5)}=min {∞; 0+∞}=∞

d(6)=min {d(6); d(0)+a (0,6)}=min {∞; 0+∞}=∞

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 1 d(1)=5. Включаем вершину №1 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (0,1)

d(2)=min {d(2); d(1)+a (1,2)}=min {8; 5+∞}=8

d(3)=min {d(3); d(1)+a (1,3)}=min {∞; 5+12}=17
d(4)=min {d(4); d(1)+a (1,4)}=min {∞; 5+∞}=∞
d(5)=min {d(5); d(1)+a (1,5)}=min {∞; 5+9}=14
d(6)=min {d(6); d(1)+a (1,6)}=min {∞; 5+∞}=∞

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 2 d(2)=8. Включаем вершину №2 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (0,2)

d(3)=min {d(3); d(2)+a (2,3)}=min {17; 8+∞}=17
d(4)=min {d(4); d(2)+a (2,4)}=min {∞; 8+8}=16
d(5)=min {d(5); d(2)+a (2,5)}=min {14; 8+4}=12
d(6)=min {d(6); d(2)+a (2,6)}=min {∞; 8+2}=10

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 6 d(6)=10. Включаем вершину №6 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (2,6)

d(3)=min {d(3); d(6)+a (6,3)}=min {17; 10+∞}=17
d(4)=min {d(4); d(6)+a (6,4)}=min {16; 10+7}=16
d(5)=min {d(5); d(6)+a (6,5)}=min {12; 10+∞}=12

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 5 d(5)=12. Включаем вершину №5 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (2,5)

d(3)=min {d(3); d(5)+a (5,3)}=min {17; 12+6}=17
d(4)=min {d(4); d(5)+a (5,4)}=min {16; 12+∞}=16

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 4 d(4)=16. Включаем вершину №4 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (2,4)

d(3)=min {d(3); d(4)+a (4,3)}=min {17; 16+3}=17

Минимальную длину имеет путь от вершины 0 до вершины 3 d(3)=17. Включаем вершину №3 в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (1,3)

Мы получили ориентированное дерево кратчайших путей начинающихся в вершине №0 для исходного графа.

d(0)=0 Длина маршрута L=0
d(1)=0-1 Длина маршрута L=5
d(2)=0-2 Длина маршрута L=8
d(3)=0-1-3 Длина маршрута L=17
d(4)=0-2-4 Длина маршрута L=16
d(5)=0–2–5 Длина маршрута L=12
d(6)=0–2–6 Длина маршрута L=10

Ориентированное дерево с корнем в вершине №0 (рис. 4):

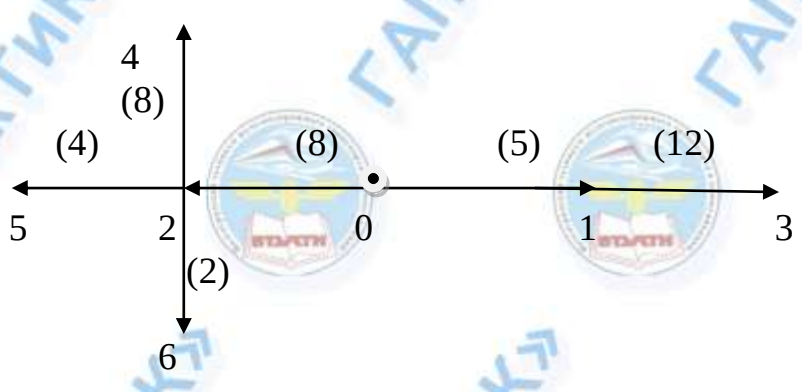


Рис. 4

Задача:

Дан граф для нахождения минимального пути от вершины «а» до всех остальных (рис. 5).

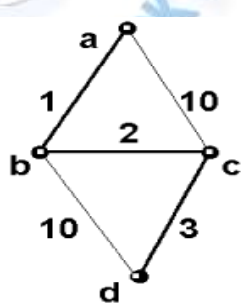


Рис. 5

Решение:

Представим граф, в виде матрицы длин дуг. Строим таблицу (таб. 3).

	a	b	c	d
a	∞	1	10	∞
b	1	∞	2	10
c	10	2	∞	3
d	∞	10	3	∞

Таб. 3

Стартовая вершина, от которой строится дерево кратчайших путей – вершина “a”.

Задаем стартовые условия: d(a)=0, d(x)=∞

Окрашиваем вершину “a”, y=a.

Находим ближайшую вершину к окрашенной нами, используя формулу: $d(x)=\min\{d(x); d(y)+a_{y,x}\}$

d(b)=min {d(b); d(a)+a (a,b)}=min {∞; 0+1}=1

d(c)=min {d(c); d(a)+a (a,c)}=min {∞; 0+10}=10

d(d)=min {d(d); d(a)+a (a,d)}=min {∞; 0+∞}=∞

Минимальную длину имеет путь от вершины “a” до вершины “b” d(b)=1. Включаем вершину “b” в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (a,b)

d(c)=min {d(c); d(b)+a (b,c)}=min {10; 1+2}=3

d(d)=min {d(d); d(b)+a (b,d)}=min {∞; 1+10}=11

Минимальную длину имеет путь от вершины “a” до вершины “c” d(c)=3. Включаем вершину “c” в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (b,c)

d(d)=min {d(d); d(c)+a (c,d)}=min {11; 3+3}=6

Минимальную длину имеет путь от вершины “a” до вершины “d” d(d)=6. Включаем вершину “d” в текущее ориентированное дерево, а так же дугу ведущую в эту вершину. Согласно выражению это дуга (c,d)

Мы получили ориентированное дерево кратчайших путей начинающихся в вершине “a” для исходного графа.

d(a)=0 Длина маршрута L=0

d(b)=a-b Длина маршрута L=1

d(c)=a-b-c Длина маршрута L=3

d(d)=a-b-c-d Длина маршрута L=6

Ориентированное дерево с корнем в вершине “a” (рис. 6):

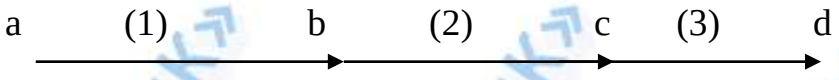


Рис. 6

Задача коммивояжера:

Коммивояжер желает посетить 6 городов. Они соединены сетью дорог

Расстояние между городом 1 и городом 2 составляет 6 км, между городом 1 и городом 3 - 7 км, между городом 1 и городом 4 - 20 км, между городом 1 и городом 5 - 12 км, между городом 1 и городом 6 - 10 км. Расстояние между городом 2 и городом 3 составляет 5 км, между городом 2 и городом 4 - 7 км, между городом 2 и городом 5 - 9 км, между городом 2 и городом 6 - 16 км. Расстояние между городом 3 и городом 4 составляет 4 км, между городом 3 и городом 5 - 10 км, между городом 3 и городом 6 - 12 км. Расстояние между городом 4 и городом 5 составляет 3 км, между городом 4 и городом 6 - 15 км. Расстояние между

городом 5 и городом 4 составляет 6 км, между городом 5 и городом 6 - 4 км, между городом 6 и городом 3 - 11 км, между городом 6 и городом 5 - 21 км. Коммивояжёр должен посетить все 6 городов по одному разу, вернувшись в тот, с которого начал. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Решение:

Данную задачу можно решить венгерским методом, методом совершенного паросочетания. Для этого требуется построить матрицу А, отображающую длину между городами: a_{ij} – расстояние от города i до города j ($i \neq j$), если $i = j$, то ставится ∞ ,так как дороги не существует.

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 7 & 20 & 12 & 10 \\ 6 & \infty & 5 & 7 & 9 & 16 \\ 7 & 5 & \infty & 4 & 10 & 12 \\ 20 & 7 & 4 & \infty & 3 & 15 \\ 12 & 9 & 10 & 6 & \infty & 4 \\ 10 & 16 & 11 & 15 & 21 & \infty \end{pmatrix}$$

Строится приведенная матрица с целью получения в каждой строке и столбце не меньше одного кратчайшего маршрута (нулевого приведенного значения). Для этого в каждой строке матрицы А от каждого элемента отнимается значение минимального элемента этой строки:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 14 & 6 & 4 \\ 1 & \infty & 0 & 2 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 6 & 8 \\ 17 & 4 & 1 & \infty & 0 & 12 \\ 8 & 5 & 6 & 2 & \infty & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 5 & 11 & \infty \end{pmatrix}$$

Вычисляется коэффициент приведения, равный сумме всех минимальных элементов матрицы А, которые вычитали из строк и столбцов:

$К_{пр}$ = 6 +5 + 4 + 3 + 4 + 10 = 32

Вычисляются коэффициенты значимости K_{ij} для каждого занулившегося элемента, где a_{ij} – элементы приведенной матрицы.

$$K_{ij} = \min_i a_{ij} + \min_j a_{ij}$$

$К_{12}$ = 1 + 1 = 2
$К_{23}$ = 1 + 1 = 2
$К_{34}$ = 1 + 2 = 3
$К_{45}$ = 1 + 4 = 5
$К_{56}$ = 2 + 4 = 6
$К_{61}$ = 1 + 1 = 2

Из приведенной матрицы нужно вычеркнуть строку и столбец, содержащие элемент с максимальным коэффициентом значимости. В данном случае таким элементом является a_{56}: коэффициент значимости равен 6. Для элемента a_{56} установим значение1: **a_{56} = 1.**

$$A_2 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 14 & 6 \\ 1 & \infty & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & \infty & 0 & 6 \\ 17 & 4 & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

И продолжаем вычислять коэффициент значимости для матрицы A_2:
$К_{12}$ = 1 + 1 = 2
$К_{23}$ = 1 + 1 = 2
$К_{34}$ = 1 + 2 = 3

$K_{45} = 1 + 4 = 5$
$K_{61} = 1 + 1 = 2$

Из матрицы A_2 нужно вычеркнуть строку и столбец, содержащие элемент с максимальным коэффициентом значимости. В данном случае таким элементом является a_{45}: коэффициент значимости равен 5. Для элемента a_{45} установим значение1: $\mathbf{a_{45} = 1.}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 14 \\ 1 & \infty & 0 & 2 \\ 3 & 1 & \infty & 0 \\ 0 & 6 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

И продолжаем вычислять коэффициент значимости для матрицы A_3:
$K_{12} = 1 + 1 = 2$
$K_{23} = 1 + 1 = 2$
$K_{34} = 1 + 2 = 3$
$K_{61} = 1 + 1 = 2$

Из матрицы A_3 нужно вычеркнуть строку и столбец, содержащие элемент с максимальным коэффициентом значимости. В данном случае таким элементом является a_{34}: коэффициент значимости равен 3. Для элемента a_{34} установим значение1: $\mathbf{a_{34} = 1.}$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 0 \\ 0 & 6 & \infty \end{pmatrix}$$

И продолжаем вычислять коэффициент значимости для матрицы A_4:
$K_{12} = 1 + 6 = 7$
$K_{23} = 1 + 1 = 2$
$K_{61} = 1 + 6 = 7$

Из матрицы A_4 выбираем строку и столбец, содержащие элемент с максимальным коэффициентом значимости. В данном случае такими элементами являются a_{12} и a_{61} : коэффициенты значимости для них равны по 7. Остался элемент a_{23}: Для оставшихся элементов установим значение 1:

$\mathbf{a_{12} = 1, a_{61} = 1, a_{23} = 1}$

Таким образом, в маршрут вошли ребра: {5,6}, {4,5}, {3,4}, {1,2}, {6,1}, {2,3}. Все вершины (города) соединились. Длина маршрута составляет w({5,6}) + w({4,5}) + w({3,4}) +w({1,2}) + w({6,1}) + w({2,3}) = 4 + 3 + 4 + 6 + 10 + 5 = 32. Путь коммивояжера включает расстояния между городами {1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,6},{6,1}, и имеет длину 32.

1.1.10 Задания к главе.

Задание 1:

Требуется построить сеть автомобильных дорог, соединяющую 9 населенных пунктов. Возможные соединения населенных пунктов обозначены ребрами, веса которых, представляющие собой стоимость строительства (в млн. рублях), заданы и обозначены на графе. Как построить самую дешевую сеть (рис. 1)? Выберите самостоятельно метод решения задачи, если для решения необходимо переобозначить вершины цифрами, сделайде это. Строительство начинается из города А.

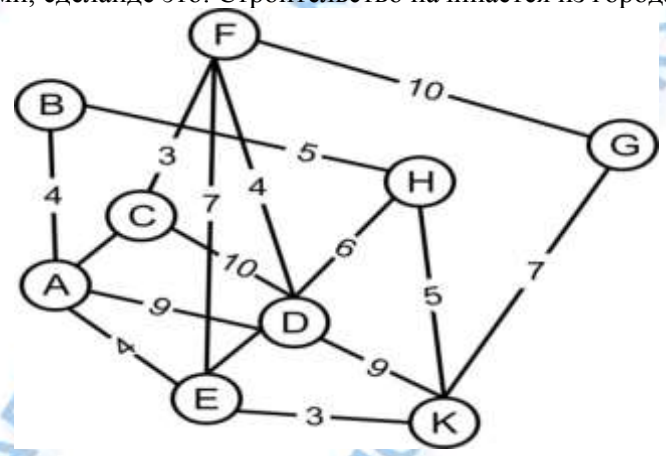


Рис. 1

Задание 2:

Требуется построить такую сеть железных дорог, которая соединяла бы все 7 городов и стоимость строительства ее была бы минимальной. Решите задачу коммивояжера (рис.2).

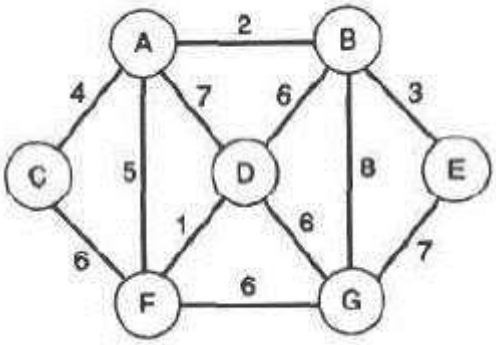


Рис. 2

Задание 3:

Каждый из семи городов может быть соединен с другим участком газопровода, стоимость строительства которого указана в графе (в млн. рублях). Как построить самый дешевый нефтепровод, какова стоимость его строительства (рис. 3)? Решите задачу коммивояжера.

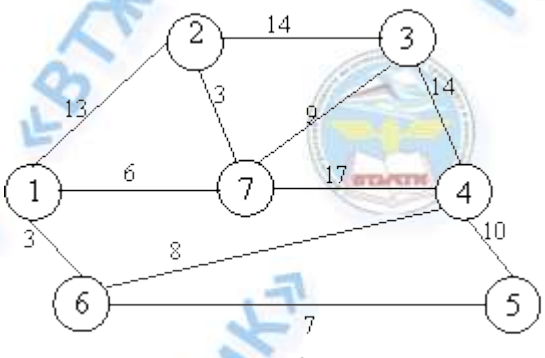


Рис. 3

Задание 4:

Найти методом Дейкстры путь с минимальной затратой на перевозку груза из пункта №1 (рис. 4).

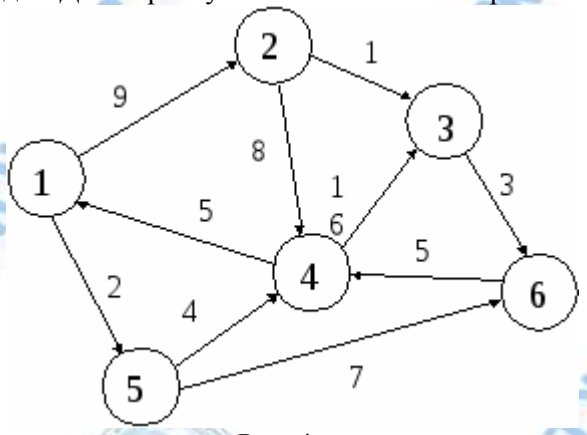


Рис. 4

Задание 5:

Определить наименьшие затраты при перевозке груза из пункта №1. Решить задачу методом Дейкстры (рис. 5).

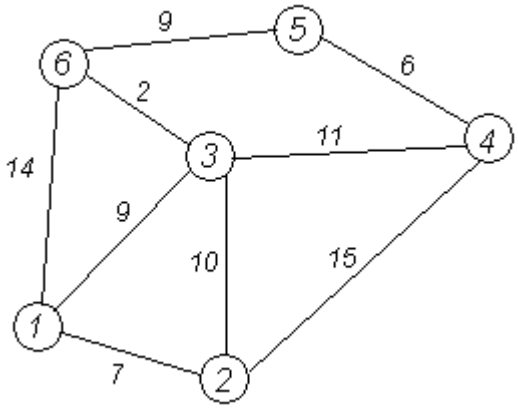


Рис. 5

Задание 6:

Определить наименьший путь при перевозке груза из пункта №7. Решить задачу методом Дейкстры (рис. 6).

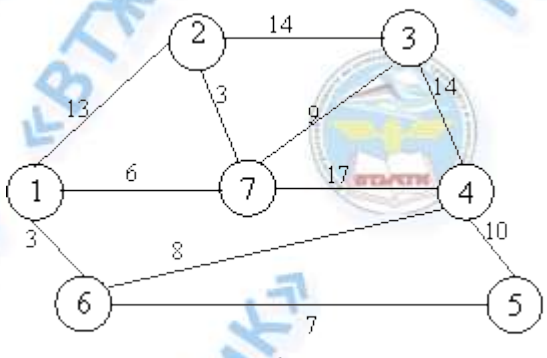


Рис. 6

1.1.11 Вопросы к разделу: «Понятие графа».

1. Понятие графа, вершины, ребра.
2. Степень вершины.
3. Понятия пути, длины пути, цикла, длины цикла.
4. Понятие висячей вершины, изолированной вершины.
5. Теорема о связи количества вершин с количеством ребер графа.
6. Четность и нечетность вершины.
7. Теорема о нечетности вершин.
8. Следствие из теоремы о четности нечетных вершин.
9. Способы задания графов: аналитический, графический, матричный.
10. Понятие и элементы орграфа.
11. Понятие смежности вершин и дуг.
12. Понятие инцидентности дуги(ребра).
13. Матрица смежности. Матрица инцидентности.
14. Связный граф. Степень связности. Таблица связности графа.
15. Степень вершины.
16. Понятие петли. Степень вершины, имеющей петлю.
17. Понятие степени входа и выхода вершины орграфа.
18. Связность орграфа.
19. Метод Дейкстры.
20. Задача коммивояжера.
21. Область применения графа.

1.2 Теория множеств

1.2.1 Множество и его элементы

Рассмотрим обозначения, которые нам понадобятся для работы с множествами.

Прописные латинские буквы: A, B, C… обозначают рассматриваемое множество, состоящее из тех или иных элементов.

{ }- фигурные скобки обозначают какие элементы заключены в то или иное подмножество;

∈ - знак принадлежности элемента множеству;

∉ - знак отрицания принадлежности элемента множеству;

Ø – обозначение пустого множества;

⊄, ⊂ – обозначение не вложенности и вложенности одного множества в другое;

∃ - обозначение существования какого-либа элемента или множества;

∄ - обозначение не существования какого-либо элемента или множества;

∩ - обозначение пересечения множеств;

∪ - обозначение объединения множеств;

¯ - обозначение отрицания: «не»;

\ - обозначение дополнения;

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством. Основатель теории множеств Георг Кантор определил множество как «многое, мыслимое нами как единое».

Определение: Множество – это совокупность объектов, называемых элементами множества. Например:

- {Эссекс, Йоркшир, Девон};
- {2, 3, 5, 7, 11}.

В этом примере элементы каждого множества заключены в фигурные скобки. Чтобы обеспечить возможность ссылок, мы будем обозначать множества прописными латинскими буквами. Например,

$S = \{3, 2, 11, 5, 7\}$ – множество, содержащее целые числа. Заметим, что множество S совпадает с одним из множеств, выписанных выше, поскольку порядок, в котором записываются элементы множества, значения не имеет.

В общем случае запись $a \in S$ означает, что объект a – элемент множества S. Часто говорят, что a принадлежит множеству S. Если объект a не принадлежит S, то пишут: $a \notin S$.

Например, все элементы множества $C = \{0, 1, 4, 9, 16,\ldots\}$ содержатся в множестве $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3,\ldots\}$. Записывается это так: C ⊂ Z.

Задача:

Определить, какие из перечисленных множеств включаются одни в другие:

а) множество всех комплексных чисел: C;

б) множество всех действительных чисел R;

в) множество всех рациональных чисел Q;

г) множество всех целых чисел Z;
д) множество всех натуральных чисел N.
Решение:
N c Z c Q c R c C
Задача:
Пусть U есть множество:
а) всех целых чисел;
б) всех прямоугольников на плоскости;
в) всех ромбов на плоскости;
Множество А пусть соответственно есть:
а) множество всех четных чисел;
б) множество всех квадратов;
в) множество всех квадратов.
Определить какие из перечисленных множеств включены одни в другие?
Решение:
а) A c U б) A c U в) A c U

Задача:
. М-множество четырехугольников. Принадлежит ли этому множеству:
1) ромб; 2) трапеция; 3) окружность; 4) прямоугольник;
5) диагональ квадрата; 6)призма?
Решение:
{ромб, трапеция, прямоугольник} ∈ M, а
{окружность, диагональ квадрата, призма} ∉ M
Пусть дана некоторая совокупность элементов, которую обозначим: A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}. Предположим, что часть элементов 1,2,4 и 6 имеют круглую форму, а 2,3,4,8 и 9 – окрашены в белый цвет. В этом случае говорят, что множество А имеет два подмножества: B={1,2,4,6} и C={2,3,4,8,9}. Принято говорить, что множество А – *фундоментально,* а подмножества В и С – просто множества. В результате мы имеем еще несколько подмножеств:
K_1 = {2,4} – белые элементы круглой формы;
K_2 = {5,7,10,11} - элементы, не обладающие ни одним из рассматриваемых свойств;
K_3 = {1,6} - элементы исключительно круглые;
K_4 = {3,8,9} - элементы исключительно белые.
Включение подмножества в множество обозначается символом: "c". Записывается это так: BcA, CcA и читается: подмножество В включено в множество А и подмножество С включено в множество А.
Задача:
Дано множество K={21;54;153;171;234}. Составить подмножество P из чисел, которые: 1) делятся на 7; 2) делятся на 9; 3) не делятся на 5.
Решение:
1– {21 } є P 2– {54, 153, 171, 234} є P 3-{21, 54, 153, 171, 234} є P
Определение:
Если все элементы множества А являются элементами множества В, то А=В
Пример:
А-множество букв слова «Весна», В-множество букв слова «Навес». А=В.
Определение:
Множество конечно, если оно содержит конечное число элементов.
Определение:
Множество бесконечно, если оно содержит бесконечное число элементов.
Определение:
Множество называется пустым, если оно не содержит элементов. Ø – обозначение пустого множества.
Пример:
а)М-множество действительных корней квадратного уравнения $x^2+1=0$;
Данное множество является пустым, т.к. корнями данного уравнения являются элементы из множества комплексных чисел.
б)К множество всех четных чисел;
Данное множество бесконечно, т.к. число четных чисел – бесконечно.
в) В-множество всех студентов группы СТ;
Данное множество является конечным, т.к. число студентов в группе СТ – конечно.

г) С-множество прямоугольных треугольников, у которых сумма квадратов катетов не равна квадрату гипотенузы?

Данное можество является пустым, т.к. в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов всегда равна квадрату гипотянузы.

д) Т-множество целых корней уравнения x^2-9=0.

Данное множество конечно, т.к. уравнение имеет два Целых корня: 3 и -3.

Задача:

Задать характеристическим свойством множество:

1) всех параллелограммов;
2)всех квадратов;
3)всех прямоугольников;
4)всех ромбов;
5)всех равнобедренных треугольников;
6)всех прямоугольных треугольников.

Решение:

1) Параллелограммы – это множество четырехугольников, у которых попарные стороны параллельны и равны между собой.
2) Квадраты – это множество прямоугольников, у которых все стороны равны.
3) Прямоугольники – это множество параллелограммов, у которых все углы равны 90 градусов.
4) Равнобедренные треугольники – это множество треугольников, у которых две стороны равны.
5) Прямоугольные треугольники – это множество треугольников, у которых один угол равен 90 градусов.

1.2.2 Задания к главе.

Задание 1:

Вставьте пропущенные слова:

В математике часто приходится определять принадлежность данного эле- мента конкретному множеству.

Множество – совокупность объектов, _____.

Обозначения некоторых числовых множеств:

N – множество _____ чисел;
Z – множество _____ чисел;
Q – множество _____ чисел;
R – множество _____ чисел

Задание 2:

Запишите на символическом языке следующее утверждение:

а) число 10 – натуральное _____
б) число – 7 не является натуральным_____
в) число – 100 является целым_____
г) число 2,5 – не целое_____

Задание 3:

Среди перечисленных ниже множеств укажите конечные и бесконечные множества:

а) множество чисел, кратных 13;
б) множество делителей числа 15;
в) множество деревьев в лесу;
г) множество натуральных чисел;
д) множество рек Ростовской области;
е) множество корней уравнения $x + 3 = 11$;
ж) множество решений неравенства $x + 1 < 3$.

Задание 4:

Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254; _____
б) 8797; _____
в) 11000; _____
г) 555555_____

Задание 5:

Запишите: Множество всех гласных букв русского алфавита: А=_____

Запишите: Множество цифр десятичной системы счисления: В=_____

Задание 5:

Множества обозначаются прописны- ми (заглавными) буквами латинско- го алфавита (без индексов или с индексами).
Например:_____
Элементы множества обозначают- ся строчными (малыми) буквами латинского алфавита.
Например:_____
Задание 6:
Даны множества: A = {10}, B = {10, 15}, C = {5, 10, 15}, D = {5, 10, 15, 20}. Поставьте вместо … знак включения так, чтобы получилось верное утверждение:
а) A … D; б) A … B; в) C … A; г) C … B.
Задание 7:
Даны три множества: A = {1, 2, 3, …, 37}, B = {2, 4, 6, 8, …}, C = {4, 8, 12, 16, …, 36}.Верно ли, что:
а) $A \subset B$ б) $B \subset C$ в) $C \subset A$; г) $C \subset B$?
Задание 8:
Укажите, каким из множеств принадлежат числа 3, 4, 5, 13, 25, 1/9,1/6,1/4. Укажите, каким из множеств не принадлежат указанные числа. Запишите эти утверждения символически.
Задание 9:
Приведите по три примера конечных и бесконечных множеств.
Задание 10:
Составьте различные новые слова из букв слова: а)апельсин; в) стационар; б)норматив; г) ромашка;

1.2.3 Операции над множествами.

Основные операции над множествами – объединение, пересечение, дополнение .

Пусть даны множества A и B, состоящие из элементов:

A= {3,5,9,10}; B= {1,7,9,10}, тогда

Определение: ***Объединением*** множеств (или суммой) A и B является некое множество C, состоящее из элементов множества A или B: C=A+B; {1,3,5,7,9,10} є C. Записывается это так: $C=A \cup B$.

Факт принадлежности элемента x множеству A или B можно записать: $x \in A \cup B=(x \in A) \vee (x \in B)$, где

$\vee$ - символ логической связки «или», которая называется *дизъюнкцией.*

Определение: ***Пересечением*** (умножение) множеств A и B есть некое множество C, состоящее из элементов, входящих как в множество A, так и в множество B: C=A*B;

{9,10}є C. Записывается это так: $C= A \cap B$.

Факт принадлежности элемента x множеству A и B можно записать: $x \in A \cap B=(x \in A) \wedge (x \in B)$, где

$\wedge$ - символ логической связки «и», которая называется *конъюнкцией.*

Определение: ***Дополнением (***разностью) множеств A и B является некое множество C, состоящее из элементов множества A за минусом элементов, входящих в множество B: Разность (*A-B*) C=A-B;

{3,5} є C Записывается это так: $C=A \backslash B$.

Рассмотрим пример и найдем разность (B-A) C=B-A; {1,7} є C.

Определение: ***Дополнением*** множества A называется такое множество, которое состоит из элементов, не входящих в множество A. Записывается это так: $\overline{A}$.

В логике запись $\overline{A}$ обозначают как отрицание множества A.

Вернемся к нашему примеру: $\overline{A}$ это есть все числа кроме {3,5,9,10}

$\overline{B}$ это все числа кроме {1,7,9,10}

Задача:
Множество A={1,2,4,6} – элементы, обладающие свойством круглой формы.
Множество B={2,3,4,8,9} - элементы, обладающие белым цветом.
Множества: C_0 = {5,7,10,11} - элементы ни белые, ни круглые;
C_1 = {1,6} - элементы только круглые;
C_2 = {3,8,9} - элементы только белого цвета;
C_3 = {2,4} - элементы и белые и круглые;
Выразить множества C_0 , C_1 , C_2 , C_3 через множества A и B.
Решение:
$C_0 = \overline{A} \cap \overline{B}$; Не белые: $\overline{A}$, не круглые: $\overline{B}$. «И» обозначает пересечение.

$C_1 = A \cap \overline{B}$; Круглые: A, не белые: $\overline{B}$. Т.к. нужны элементы круглые и не белые, то берем операцию пересечение, т.к. она соответствует логическому «и».

$C_2 = \overline{A} \cap B$; Белые: B и не круглые – это пересечение с $\overline{A}$, т.к. нам надо логическое «и».

$C_3 = A \cap B$; Белые: B и круглые: A. «И» символизирует пересечение множеств A и B.

Основные законы операций над множествами:

1. Закон идемпотентности: $A \cap A = A$ и $A \cup A = A$
2. Закон коммутативности: $A \cap B = B \cap A$ и $B \cup A = A \cup B$
3. Закон ассоциативности: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ и $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. Закон дистрибутивности: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. Закон поглощения: $A \cup (A \cap B) = A$ и $A \cap (A \cup B) = A$
6. Закон Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7. Закон склеивания: $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) = A$ и $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$
8. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$

Задача:

Упростить выражение: $S = (\overline{(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{C}}) \cap \overline{(A \cup B \cup C) \cap (A \backslash C)}$

Решение:

Итак, S представляет собой произведение (пересечение) S_1 и S_2. Преобразуем каждое из них.

$S_1 = (\overline{(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{C}})$=(по закону Моргана $(\overline{A \cap \overline{B}}) = \overline{A} \cup B$) = $\overline{\overline{A} \cup B \cup A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{C}}$ = (по закону поглощения $B \cup A \cap B = B$) = $\overline{\overline{A} \cup B \cap \overline{A} \cap \overline{C}}$ = (по закону поглощения $\overline{A} \cup B \cap \overline{A} = \overline{A}$) = $\overline{\overline{A} \cap \overline{C}}$ = (по закону Моргана) = $A \cup C$.

$S_2 = \overline{(A \cup B \cup C) \cap (A \backslash C)}$ = ($A \backslash C = A \cap \overline{C}$) = $\overline{(A \cup B \cup C) \cap (A \cap \overline{C})}$ = $\overline{(B \cup (A \cup C)) \cap (A \cap \overline{C})}$ = $\overline{(B \cap (A \cap \overline{C})) \cup (A \cup C) \cap (A \cap \overline{C})}$ = $\overline{(B \cap A \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cap A \cap (A \cup C))}$ = $\overline{(B \cap A \cap \overline{C}) \cup (A \cap C)}$) = $\overline{A \cap \overline{C}}$ = $\overline{A} \cup C$.

$S = (A \cup C) \cap (\overline{A} \cup C)$ = (по закону склеивания) = C.

Ответ: S=C.

1.2.4 Задания к главе.

Задание 1:

Пусть U – множество всех целых чисел;

Z1 – множество целых чисел, кратных 2;

Z2 – множество целых чисел, кратных 3.

Найти: а) $Z_1 \cup Z_2$ в)$Z_1 \cap Z_2$; б)$Z_1 \cap \overline{Z_2}$; г)$Z_1 \cup \overline{Z_2}$

Задание 2:

Пусть U есть множество:

а) всех целых чисел;

б) всех прямоугольников на плоскости;

в) всех ромбов на плоскости;

Множество А пусть соответственно есть:

а) множество всех четных чисел;

б) множество всех квадратов;

в) множество всех квадратов.

Охарактеризовать множество $\overline{A}$.

Задание 3:

Пусть заданы следующие множества:

а) А – множество всех прямоугольников; В – множество всех ромбов;

б) А – множество всех треугольников; В – множество всех правильных многоугольников;

в) А – множество натуральных чисел, кратных 2; В – множество натуральных чисел, кратных 3.

Охарактеризовать множество АВ.

Задание 4:

Пусть U – множество всех треугольников на плоскости, X1 – множество равносторонних треугольников, X2 – множество прямоугольных треугольников.

Найти: а) $X_1 \cup X_2$ в)$X_1 \cap X_2$; б)$X_1 \cap \overline{X_2}$; г)$X_1 \cup \overline{X_2}$

Задание 5:

В библиотеке МЭСИ имеются книги по различным отделам науки и искусства. Пусть А – множество всех книг в библиотеке МЭСИ,

B – множество всех математических книг в РФ. Охарактеризуйте множество A\B.

Задание 6:
Что является пересечением к объединением множества четных и множества нечетных неотрицательных чисел?

Задание7:
Множество A состоит из целых чисел, кратных 4,
B – из целых чисел, кратных 10,
C – из целых чисел, кратных 75.
Из каких чисел состоит множество A∩B∩C?

Задание 8:
Даны множества: A = {2, 3, 4, 10}; B = {1, 2, 10, 12} ; C = {1, 9, 12}. Указать элементы следующих множеств:
а)A∩B∪B∩C
б)(A∪B)\C
в)(A∪C)\B∩A

Задание 9:
Вытекает ли из равенства A\B=C, что A=B∪C?

Задание 10:
Упростить выражение: $\overline{\overline{(A\backslash B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$.

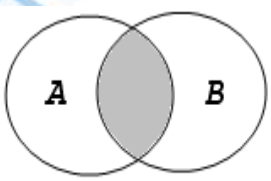
Задание 11:
Пользуясь свойствами операций над множествами, упростить выражения:
а)A∩(A∪C)∩(B∪C)
б)A∩(A∪K)∩(B∪O)
в)(A∪B)∩(A∪K)∪(A∪B)∩(B∪O)
г)(A∪B)∩(B∪K)∩(A∪O)

Задание 12:
Упростить следующие выражения:
$(A \cap B) \cup (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$
$\overline{\overline{X \backslash У}} \cap (\overline{X} \cup \overline{У})$
$(A \cup B \cup C) \cap (\overline{A \cup B}) \cap (A \cup (B \backslash C)) \cap A$
$\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} \cup \overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{A} \cup \overline{C}$
$\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C} \cap \overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A} \cap C$
$\overline{\overline{A} \cup B} \cup A \cap B \cap C \cup A \cap C \cup \overline{(\overline{C} \cup B) \cap (C \cup \overline{B})}$
$\overline{(\overline{A} \cup B)} \cup \overline{\overline{A \cap B} \cup \overline{C}} \cap \overline{A \cap C} \cup (\overline{C} \cup B)$
$\overline{\overline{A} \cap B} \cap (A \cup B \cup C) \cup A \cup C \cup \overline{(\overline{C} \cap B)} \cup (C \cap \overline{B})$

Задание 13:
Доказать тождества:
1. (A∪B)∩(B∪C)∩(C∪A)=(A∩B)∪(B∩C)∪(C∩A)
2. (A\B)∪(B\C)∪(C\A)∪A∩B∩C=A∪B∪C

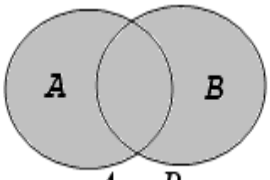
1.2.5 Диаграммы Эйлера – Венна

Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых *кругами Эйлера-Венна*. Элементы множества изображаются точками внутри круга, если они принадлежат множеству.И точками вне круга, если они не принадлежат множеству. Основные операции над множествами – объединение, пересечение, дополнение – могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера-Венна. На рис. 1а с помощью диаграммы Эйлера-Венна изображено пересечение двух множеств А и В. Заштрихованная область - это и есть результат пересечения. На рис. 1б изображено объединение двух множеств А и В. Заштрихованная область – это есть результат объединения. И на рис. 1в изображено дополнение множества А без В. Так же на рисунке результат дополнения есть заштрихованная область.



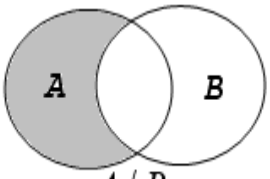
$A \cap B$

Рис. 1а



$A \cup B$

Рис. 1б



A / B

Рис. 1в

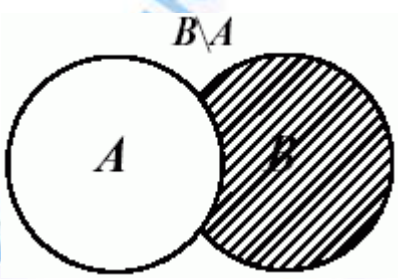


Рис. 2

На рис. 2 заштрихована область, которая является результатом разности множеств B-A, т.е. дополнением множества B (B\A).
На рис. 3а диаграмма Эйлнра-Венна отображает следующую операцию над множествами: (A∩B)∪(A∩B∩C). Соответственно на рис. 3б: (A∩C)∪(A∩B∩C) и на рис. 3в: (A∩C)∪(A∩B).

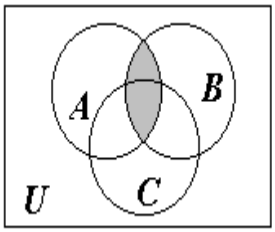


Рис. 3а

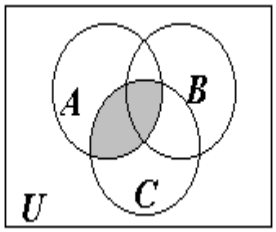


Рис. 3б

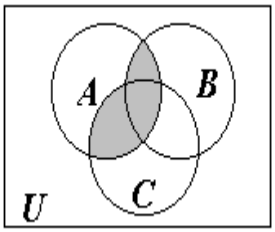


рис. 3в

На рис. 4 диаграмма Эйлера-Венна показывает отрицание множества A: $\overline{A}$.

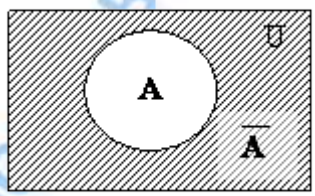


Рис. 4

Закон дистрибъютивности объединения множеств относительно пересечения (A∪(B∩C)) можно увидеть на рис. 5.

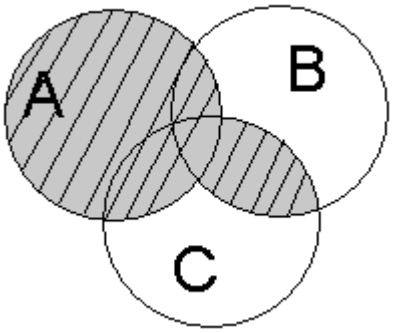


Рис. 5

Закон дистрибъютивности пересечения множеств относительно объединения (A∩(B∪C)) можно увидеть на рис. 6.

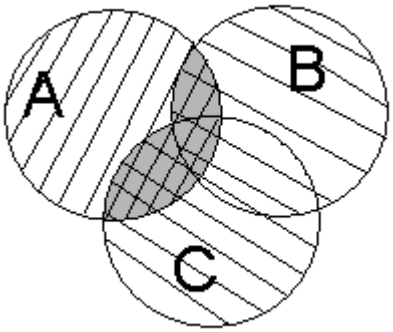


Рис. 6

На рис. 7 С помощью диаграммы Эйлера-Венна изображена операция A∩B=A

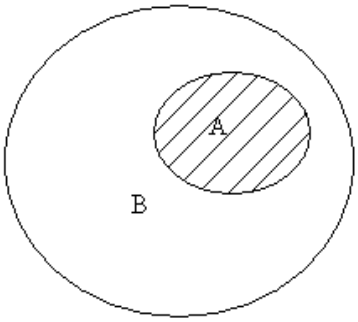


Рис. 7

На рис. 8 диаграмма Эйлера-Венна изображает разность A-B в случае когда множество B включено в множество A.

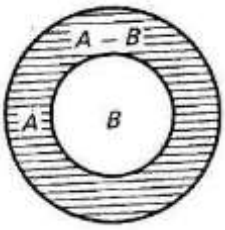


Рис. 8

С помощью диаграмм Эйлера-Венна можно решать задачи следующего типа.

Задача:

На трех станках должны пройти обработку 80 деталей. Известно, что 10 из них были обработаны на всех трех станках, 20 только на первом и втором, 5 только на первом и третьем, 15 только на втором и третьем. Определить, сколько деталей было обработано только на одном станке, если известно: 1) что на каждом из станков было обработано одинаковое число деталей; 2) детали, обрабатываемые на втором станке, обязательно проходили обработку на первом или на третьем станке. Определить также, все ли детали прошли обработку хотя бы на одном из станков?

Решение:

Обозначим множество деталей, прошедших обработку на первом станке через A, на втором через B, на третьем через C (рис. 9).

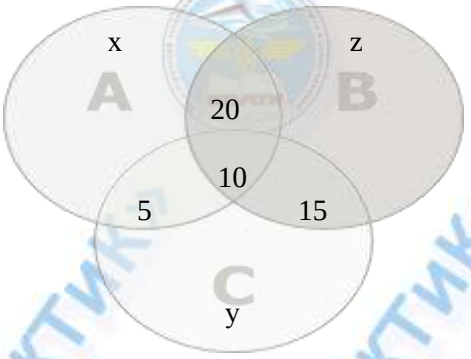


Рис. 9

Число деталей, обработанных на трех станках, есть число элементов множества и равно 10. Только на первом и втором станках прошли обработку 20 деталей. Помещаем эту цифру в соответствующее множество на рис. 3. Аналогично проставляем цифры 5 и 15 из условия задачи. Число деталей, прошедших обработку только на первом станке, обозначим через X, на третьем через У, только на втором через Z. Из условия задачи Z = 0. Число деталей, обработанных на каждом из станков одинаково, следовательно, X + 20 + 10+ 5 = У + 15 + 10 +

5 = 20 + 10 + I5 + 0. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными. Отсюда определяем X = 10; У = 15. Следовательно, только на одном станке (первом, втором или третьем) прошли обработку X + У + Z = 25 деталей; хотя бы на одном станке обработано 10 + 20 + 10 + 5 + 15 + 15 + 0 = 75 деталей. Следовательно, 80 – 75 = 5 деталей не были обработаны ни на одном из станков.

1.2.6 Задания к главе.

Задача 1:
Лекции по экономике посещают 20 студентов, по математике – 30. Найти число студентов, посещающих лекции по экономике или математике, если

а) лекция проходят в одно и то же время;

б) лекции проходят в разные часы и 10 студентов слушают оба курса.

Задача 2:
В ящике лежат 120 деталей, из них
на автомате № 1 обработано 82 штуки,
на автомате № 2 – 53,
а на автомате № 3 – 42 штуки.
18 деталей было обработано на автоматах № 1 и № 2,
17 – на автоматах № 1 и № 3
и 15 – на автоматах № 2 и № 3.
10 деталей прошли обработку на всех трех автоматах. Сколько деталей не обработано ни на одном из автоматов?

Задача 3:
Управление имеет 150 предприятий, из них
80 выпускают продукцию А,
60 продукцию В
и 50 – продукцию С.
Продукцию А и В выпускают 20 предприятий,
продукцию В и С – 30 предприятий,
продукцию А и С – 10.
Сколько предприятий управления не выпускают ни одного из указанных видов продукции, если все виды продукции А, В и С выпускают 5 предприятий?

Задача 4:
Среди 100 студентов института иностранными языками занимались: немецким – 30 человек,
французским – 42 человека,
испанским – 28,
испанским и немецким – 8 человек,
немецким и французским – 5 человек,
испанским и французским – 10; 3 студента изучали все три языка. Сколько студентов изучали только французский язык? Сколько студентов не изучили ни одного из иностранных языков?

Задача 5:
В отчете об обследовании 100 студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский язык таково: все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский – 10, французский и английский – 8, немецкий и французский – 20, английский язык – 30 человек, немецкий – 23, французский – 50. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

Задача 6:
При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 61% студентов читают журнал А, 50% – журнал В, 50% – журнал С, 30% – журналы А и В, 20% – журналы В и С, 40% – журналы А и С, 10% – журнала А, В и С. Сколько процентов студентов?1) не читают ни одного из журналов; 2) читает два журнала; 3) читают не менее двух журналов?

Задача 7:
На одной из кафедр университета работают тридцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, восемь – немецкий, шесть – французский. Пять человек знают английский и немецкий, четыре – английский и французский, три – немецкий и французский. Сколько человек: 1) знают все три языка; 2) знают два языка; 3) знают только английский язык?

Задача 8:
На курсах иностранных языков (английский, французский, немецкий языки) учатся 300 человек. Сколько человек изучают каждый из указанных языков и сколько человек изучают два языка одновременно, если известно, что: 1) слушатели, изучающие английский язык, не изучают немецкого; 2) число слушателей, изучающих английский или французский язык, равно 230 и равно числу слушателей, изучающих французский или немецкий язык; 3) число слушателей, изучающих английский или немецкий языки, равно 250, а число слушателей, изучающих английский и французский языки, равно 60?

Задача 9:
Группа студентов в 36 человек сдавала экзаменационную сессию. Отличников в группе 5 человек. Число студентов, сдавших сессию только на «отлично» и «хорошо», равно числу студентов, сдавших сессию только на удовлетворительные оценки. 3 студента получили только хорошие оценки; 2 человека получили отличные, хорошие и удовлетворительные оценки; II человек получили только хорошие и удовлетворительные оценки. Удовлетворительные или хорошие оценки получили всего 28 человек. Студентов, получивших только отличные и удовлетворительные оценки, нет. Сколько студентов сдали сессию только на удовлетворительно? Сколько студентов получили отличные оценки? Сколько студентов не явились на экзамены?

Задача 10:
В машинописном бюро печатаются технические, экономические и медицинские тексты. Технические тексты могут печатать 40 машинисток; медицинские – 42; 17 машинисток печатают только один вид текста, 13 машинисток – все три вида текста. Число машинисток, печатающих экономические тексты, равно числу машинисток, печатающих медицинские тексты. Только технические тексты печатают 9 машинисток, только медицинские – 5 машинисток. Сколько машинисток печатают по два вида текста? Только по два текста? Только экономические тексты?

Задача 11:
Контрольную работу, содержащую одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии, писали 105 учащихся. Задачу по алгебре решили 70 человек, по геометрии 59, по тригонометрии 62. 90

учащихся решили задачи по алгебре или геометрии, 89 – по геометрии или тригонометрии. По алгебре или тригонометрии задачи были решены 91 учащимися, а 6 школьников не решили ни одной задачи. Сколько учащихся решили все три задачи? Только одну задачу? Две задачи?

Задача 12:
Троллейбусный парк обслуживает три маршрута. Маршрут № 1 обслуживают 28 водителей; маршрут № 2 – 26; № 3 – 30 водителей. Только по два маршрута обслуживают 14 водителей; все три маршрута 4 водителя; только маршрут № 1 – 18 водителей, только маршрут № 3 – 16 водителей. Сколько водителей обслуживают только маршрут № 2? Только один маршрут? Маршруты № 2 и № 3 одновременно?

Задача 13:
32 машиностроительных завода выпускают оборудование трех типов, из них 17 заводов выпускают оборудование только двух типов, 8 заводов – оборудование только первого и второго типов, 7 заводов – оборудование только первого и третьего типов; 3 завода – оборудование всех трех типов. Число заводов, выпускающих оборудование второго типа, равно числу заводов, выпускающих оборудование третьего типа. Оборудование первого и третьего типов выпускают 27 заводов. 3 завода поставлены на профилактический ремонт. Определить, сколько заводов выпускают оборудование двух типов? Только третьего типа? Только одного типа?

Задача 14:
Некоторые изделия подверглись пробам трех видов, причем: 1) все три пробы с одного изделия не брались; 2) вторая проба бралась только в том случае, если не была взята первая; 3) третья проба бралась только тогда, когда уже были взяты первая или вторая. Каково общее число изделий, подвергнутых пробам, и каково число изделий, подвергнутых только одной пробе, если известно, что: 1) число изделий, подвергнутых второй или третьей пробе, равно 90; 2) число изделий, подвергнутых первой или третьей пробе, равно 100; 3) число изделий, подвергнутых первой пробе, равно числу изделий, подвергнутых второй пробе;4) число изделий, подвергнутых только первой пробе, равно числу изделий, подвергнутых третьей пробе?

Задача 15:
Некоторые изделия были обследованы на трех операциях. Причем 12 изделий были обследованы на всех трех операциях, 19 изделий – только на первой и второй операциях, 23 – только на второй и третьей, 26 – только на первой и третьей. Сколько изделий было обследовано на каждой из трех операций и каково общее число обследованных изделий, если известно, что: 1) на каждой из трех операций было обследовано одинаковое число изделий; 2) число изделии, обследованных только на одной операции, равно числу изделий, обследованных только на двух операциях?

Задача 16:
Все рабочие некоторого предприятия владели хотя бы одной из трех профессий: токарь, слесарь, монтажник. Причем 10% рабочих владели всеми тремя профессиями; 28% – профессиями слесаря и токаря; 33% – токаря и монтажника и 25% – слесаря и монтажника. Остальные рабочие решили приобрести смежную профессию. Сколько рабочих решили приобрести смежную профессию и сколько среди них было токарей, слесарей и монтажников (в отдельности), если число рабочих каждой из профессий было одинаково и 23 токаря не владели профессией ни слесаря, ни монтажника?

Задача 17:
В объединение, имеющее 120 заводов, поступил заказ на изготовление 50 комплектов оборудования нового типа. Каждый комплект оборудования состоит из трех типов станков. Выяснилось, что станки всех трех типов могут изготовить 12 заводов, второго и третьего – 16 заводов, первого и третьего – 20 заводов. Остальные заводы могут переключаться только на изготовление одного из типов станков. Было принято решение поручить выполнение заказов минимальному числу заводов. Установить: 1) сколько заводов принимали участие в выполнении заказа; 2) как был распределен заказ по заводам, если каждый из заводов мог принять участие в изготовлении станков только к одному комплекту.

Задача 18:

На телефонной станции имеются три основные линии обслуживания. 10 телефонисток обслуживают одновременно первую и вторую линии, 15 – вторую и третью. Первую и третью линии одновременно обслуживать нельзя. Сколько телефонисток работали на станции и какова пропускная способность каждой линии, если известно, что: 1) пропускная способность всех линий одинакова; 2) первые две линии обслуживали 50 телефонисток; 3) одна телефонистка обслуживает 10 разговоров в минуту? Замечание: пропускная способность линии определяется максимальным числом разговоров в минуту.

Задача 19:

Выпишите операции над множествами по диаграммам Эйлера-Венна, изображенных на рис. 1а-е.

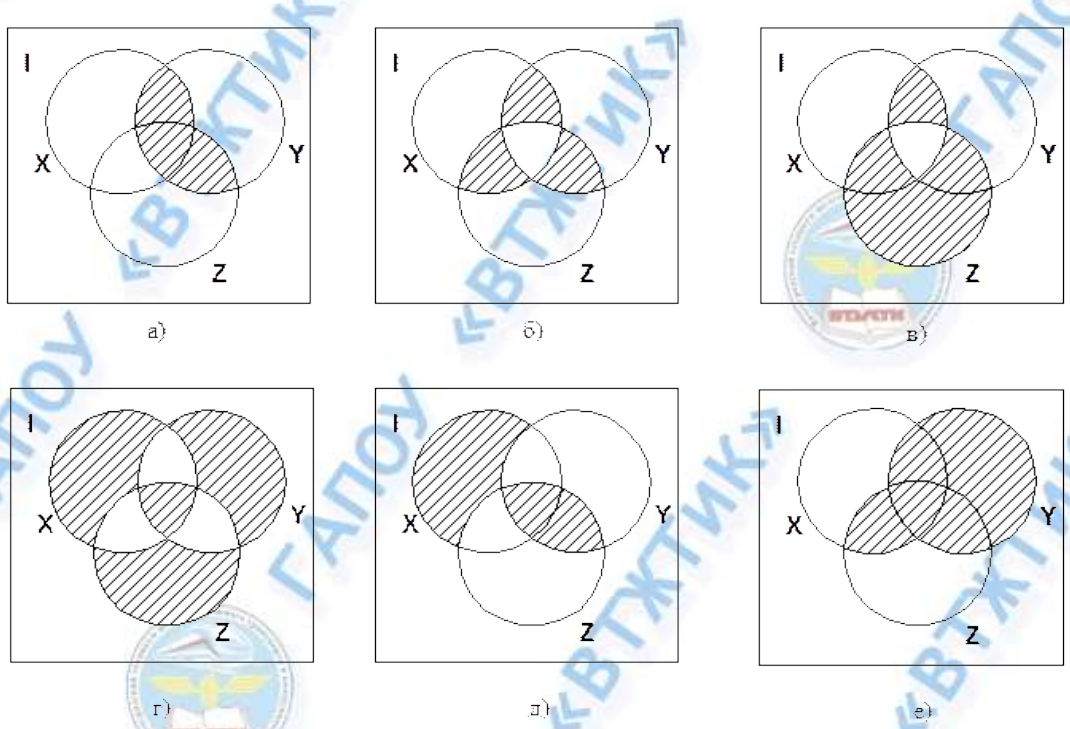


Рис. 1

Задача 20:

Построить диаграмму Эйлера-Венна для следующих множеств:

1. $\overline{A} \cap B$; $\overline{A} \cup B$; $A \cap \overline{B}$; $A \cup \overline{B}$
2. $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cap \overline{B})$

Задача 21:

С помощью диаграмм Эйлера-Венка убедиться в справедливости следующих равенств:

1. $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
2. $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$
3. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

Задача 22:

С помощью диаграмм Эйлера-Венка убедиться в справедливости следующих равенств:

1. $(A \backslash B) \backslash C = A \cap (B \cup C)$
2. $A \cap (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (C \backslash A)$

Задача 23:

На рис. 2 приведена диаграмма Эйлера-Венна для трех множеств. Найдите элементы множеств: $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $B \backslash C$, $C \backslash A$.

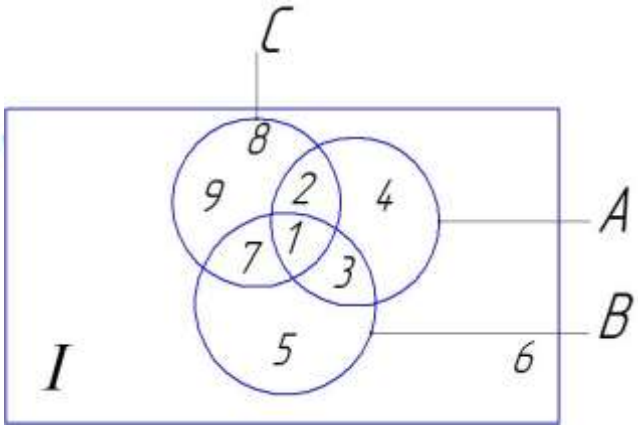


Рис. 2

Задача 24:

Даны отрезки A=[-4;5], B=(2;6], C=(5;10].Найти множества и изобразить их кругами Эйлера:

а) $(A \cup B) \cup C$; в) $(A \cap B) \cup C$; д) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$;

б) $A \cap B$; г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; е) $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

Задача 25:

A={ё;к;л;м;н}, B={к;о;з;ё;л}, C={б;ы;ч;о;к}, I={ ё;к;л;м;н;о;з;б;ы;ч;а;в;г}. Найти и изобразить кругами Эйлера:

а) $A \cap B$ в) $(A \cap B) \cup C$ д) $D=U \setminus (A \cup B \cup C)$

б) $A \cup B$ г) $(A \cup C) \cap B$ е) $D=U \setminus (A \cap B \cap C)$

Задача 26:

На рис. 3 приведена диаграмма Эйлера-Венна для трех множеств. Найти элементы множеств: : $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $A \setminus B \setminus C$.

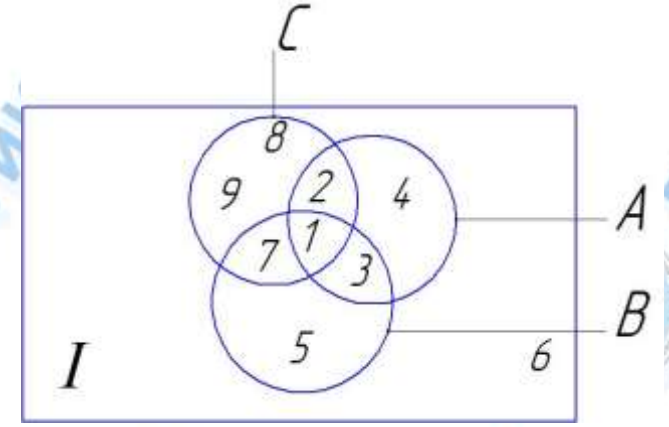


Рис. 3

1.2.7 Вопросы к разделу: «Теория множеств».

1) Какие обозначения приняты при работе со множествами?
2) Понятие множества, подмножества, элемента множества.
3) Как можно задать и обозначить множество, подможество, элемент множества?
4) Условие равенства двух множеств.
5) Пончтие конечного и бесконечного множеств.
6) Понятие пустого множества, его обозначение.
7) Орерации над множествами.
8) Понятие объединения множеств, обозначение. Показать объединение с помощью диаграммы Эйлера-Венна.
9) Прнятие пересечения множеств, обозначение. Показать на диаграмме Эйлера-Венна.
10) Понятие дополнения множеств, обозначение. Показать на диаграмме Эйлера-Венна.
10) Понятие отрицания множества. Показать на диаграмме Эйлера-Венна.
11) Основные законы операций над множествами.
12) Для чего нужны диаграммы Эйлера-Венна.
13) Показать основные операции над двумя множествами и над тремя множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
14) Доказать основные операции над двумя множествами и над тремя множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
15) Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна объединение и пересечение трех множеств.
16) Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна объединение и пересечение двух множеств.

17) Понятие и обозначение конъюнкции и дезъюнкции.

1.3 Элементы логики высказываний.

1.3.1 Логические операции и таблицы истинности.

Логика – наука о законах и формах мышления
Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно
Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть
Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом
Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение
Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)
Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.
Рассмотрим на примере. Пусть дана некоторая совокупность предметов, которую после пересчета можно было бы обозначить как

$$V = \{1, 2, ..., 11\}.$$

Предположим далее, что часть предметов, 1, 2, 4 и 6, имеет *круглую форму*, а часть — 2, 3, 4, 8 и 9 — окрашена в *белый цвет*. В этом случае говорят, что множество V имеет два подмножества

$$A = \{1, 2, 4, 6\} \text{ и } B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

круглых и белых предметов. В результате получим четыре класса элементов:
$C_0 = \{5, 7, 10, 11\}$ — элементы не обладают ни одним из названных свойств,
$C_1 = \{1, 6\}$ — элементы обладают только свойством А (быть круглыми),
$C_2 = \{3, 8, 9\}$ — элементы обладают только свойством В (быть белыми),
$C_3 = \{2, 4\}$ — элементы обладают одновременно двумя свойствами А и В.
Рассмотрим опрацию объединения.
Логически операцию объединения двух множеств можно охарактеризовать словами:
элемент x принадлежит множеству А или множеству В. При этом связка «или» одновременно означает и связку «и». Факт принадлежности элемента x множеству А обозначается как $x \in A$.
Поэтому то, что x принадлежит А *или/и* В, выражается формулой:

$$x \in A \cup B = (x \in A) \vee (x \in B),$$

С точки зрения логики, вместо одной предметной переменной x удобно ввести две логические переменные x_1 и x_2. Областью определения x_1 и x_2 будут уже не числа натурального ряда, а только два логических значения.
Например: Высказывание: « 6 делится на 3» – истинно, а высказывание: «6 не делится на 3» – ложно.
Обозначим:

1- **для *истинного* значения**
0- **для *ложного* значения высказывания.**

Тогда, определение отрицания можно выразить следующей таблицей ,которую называют таблицей истинности (таб. 1).

x_1	$\overline{x_1}$
1	0
0	1

Таб. 1

Обозначение $\overline{x_1}$ - означает отрицание.
Допустим, что $x = 7$. Поскольку это число не принадлежит ни множеству А, ни множеству В, то и логические значения переменных будут: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Эта комбинация переменных отвечает классу C_0. Теперь предположим, что выбрано число 4. Оно входит как в А, так и в В. Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, что соответствует классу C_3. Существуют еще два варианта, например, для числа $x = 6$ имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ и для $x = 8$ имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, которые отвечают классам C_1 и C_2.
Переменные x_1 и x_2 определяют некоторую логическую функцию:

$$y = f(x_1, x_2),$$

которая, в случае ***дизъюнкции***, записывается как

$$y = x_1 \vee x_2.$$

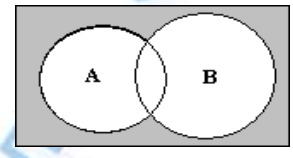
Легко усматривается, что число 7 не входит в объединенное множество $A \cup B$, поэтому при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ значение логической функции y равно нулю. Когда же выбираются числа 4, 6 или 8, то все они непременно попадут в заштрихованную область диаграммы, следовательно, при этих значениях функция y равна единице. Все это удобно оформить таблицей (таб. 2), которую называют *таблицей истинности*. Данная таблица отображает действие ***дизъюнкции.***

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

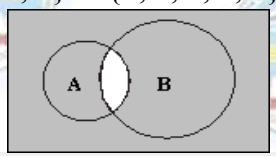
Таб. 2

Пересечение множств для нашего числового примера будет выглядеть:

$$A \cap B = \{1, 2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{2, 4\} = C_3.$$



Для пересечения или ***конъюнкции*** оформим таблицу истинности (таб. 3).



x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таб. 3

Пересечение A и $\overline{A}$ даст пустое множество 0, в котором не содержится ни одного элемента:

$$A \cup \overline{A} = 1,\ A \cap \overline{A} = 0.$$

Аналогичные равенства выполняются и для логических функций, которые имеют соответствующие названия:

$$y = x \vee \overline{x} = 1 \text{ — } \textit{тавтология},$$
$$y = x \wedge \overline{x} = 0 \text{ — } \textit{противоречие}.$$

Тавтология — это всегда истинное логическое выражение, какое бы при этом значение ни принимала переменная *x*. *Противоречие*, напротив, всегда ложное выражение.

Запись $\overline{x}$ означает: «не икс».

После введения операций над множествами все четыре области C_i можно выразить следующим образом:

$$C_0 = \underline{A} \cap \overline{B},\quad C_1 = A \cap \overline{B},\quad C_2 = \overline{A} \cap B,\quad C_3 = A \cap B.$$

Путем объединения соответствующих областей C_i можно представить любую множественную операцию, в том числе и само объединение:

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B).$$

Все это распространяется и на логику:

$$y = x_1 \vee x_2 = (x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

На рис. 1 и рис. 2 приведены диаграммы двух новых операций, которые называются, соответственно, ***стрелка Пирса* и *штрих Шеффера*.** Эти диаграммы дополняют объединение и пересечение до фундаментального множества V.

Рис. 1 Рис. 2

Стрелка Пирса – операция, отрицающая дизъюнкцию. Обозначаение: A↓B.

Штрих Шеффера – операция, отрицающая конъюнкцию, т.е. значение ложно тогда и только тогда, когда оба простых выражения истинны. Обозначение: A|B.

Таблицы истинности для этих операций (таб. 4 и таб. 5).

x_1	x_2	$y = x_1 \downarrow x_2$

0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	0

Таб. 4

x_1	x_2	$y = x_1 \mid x_2$
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таб. 5

На множествах эти операции выглядят следующим образом:

$$A \downarrow B = \{1, 2, 4, 6\} \downarrow \{2, 3, 4, 8, 9\} = \{5, 7, 10, 11\} = C_0,$$

$$A \mid B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = C_0 \cup C_1 \cup C_2.$$

Дополнением к разности служит импликация.

Импликация (логическое следствие) – это сложное логическое выражение, которое является ложным тогда и только тогда, когда условие истинно, а следствие ложно. Логическая операция импликация (логическое следование). В естественных языках соответствует обороту речи, *если…, то …*.

Обозначение: A→B.

Таблицы истинности для ***разности и импликации*** представлены таб. 6 и таб. 7.

x_1	x_2	$y = x_1 - x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Таб.6

x_1	x_2	$y = x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Таб. 7

Остается привести еще две взаимно дополняющих операции — симметрическую разность и эквивалентность.

Симметрическая разность двух множеств A и B есть объединение двух разностей:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) = C_1 \cup C_2 = \{1, 3, 6, 8, 9\}.$$

Эквивалентность определяется теми элементами множеств A и B, которые для них являются общими. Однако элементы, не входящие ни в A, ни в B, также считаются эквивалентными:

$$A \sim B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = C_0 \cup C_3 = \{2, 4, 5, 7, 10, 11\}.$$

На рис. 3 и рис. 4 показана штриховка диаграмм Эйлера — Венна, а таб. 8 и таб. 9 представляют таблицы истинности соответствующих операций.

Рис. 3

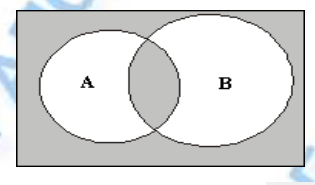
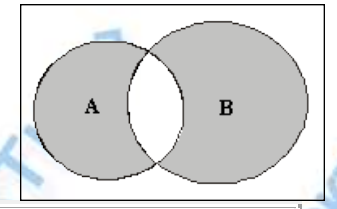


Рис.4



x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Таб. 8

x_1	x_2	$y = x_1 \sim x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Таб. 9

В заключение отметим, что симметрическая разность имеет несколько названий: *строгая дизъюнкция, исключающая альтернатива, сумма по модулю два*. Эту операцию можно передать словами — «либо А, либо В», т.е. это логическая связка «или», но без включенной в нее связки «и».

Определение: Всякое сложное высказывание, которое можно получить из элементарных высказываний с помощью логических связок, называется ***формулой алгебры логики***

Определение: ***Логическая функция*** – это функция, у которой значения переменных и значение функции выражают логическую истинность.

Порядок выполнения логических операций:

При построении таблицы истинности необходимо учитывать порядок выполнения логических операций:

1 - Инверсия

2 - Конъюнкция

3 - Дизъюнкция

4 - Импликация

5 - Эквиваленция

6 - Штрих Шеффера

7 - Стрелка Пирса

Для последних двух операций приоритет не определен.

Замечание: если необходимо изменить указанный порядок выполнения логических операций используются скобки.

1.3.2 Практическон применение методов математической логики

Решать логические задачи – это значит найти истинное высказывание, соответствующее правильному ответу на поставленный вопрос. Высказывания и их взаимосвязи в задаче бывают очень сложными, так что разобраться в них без специального аппарата достаточно сложно Этот способ предполагает составление логического выражения, удовлетворяющего всем условиям задачи, построение таблицы истинности и дальнейший анализ этой таблицы. Для решения логических задач нужно:

- внимательно изучить условие;

- выделить простые высказывания и обозначить их с помощью латинских букв;
- записать условие задачи, используя аппарат символьной логики;
- соединить простые высказывания в сложные используя логические операции;
- анализ полученной таблицы позволит получить ответ на поставленный вопрос. *Задача:*

Составить таблицу истинности для формулы:

$f=(x\wedge z\rightarrow x+y)\downarrow(x\vee\overline{y|z})$

Решение:

Для того чтобы составить таблицу истинности для формулы, необходимо выполнить последовательность всех логических операций. После последовательного выполнения всех логических операций составляется таблица истинности для данной функции (таб. 1). В таблице столбцы под номером с 1-7 означают действия над значениями x,y,z.

Приоритеты логических операций:

1 действие: $x\wedge z$ - конъюнкция

2 действие: $x\wedge z\rightarrow x$- импликация

3 действие: $(x\wedge z\rightarrow x+y)$ – симметрическая разность

4 действие: $y|z$ - штрих Шеффера

5 действие: $\overline{y|z}$ - отрицание

6 действие: $(x\vee\overline{y|z})$ - дизъюнкция

7 действие: $(x\wedge z\rightarrow x+y)\downarrow(x\vee\overline{y|z})$ - стрелка Пирса

x	y	z	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

Таб. 1

Задача:

Составить таблицу истинности для функции $f=((A\rightarrow B)\wedge A)\sim\overline{B}$

Решение:

Составим таблицу истинности для заданной функции, которая содержит две переменные A и B. В первых двух столбцах таблицы запишем четыре возможных пары значений этих переменных, в последующих столбцах — значения промежуточных действий. В результате получим таблицу (таб. 2).

A	B	$A\rightarrow B$	$(A\rightarrow B)\wedge A$	$\overline{B}$	$((A\rightarrow B)\wedge A)\leftrightarrow\overline{B}$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0

Таб. 2

Задача:

Возьмем, некоторые содержательные высказывания и приведем рядом их запись на языке логики:

а) «Тот, кто ясно мыслит, ясно говорит».

— (А → В);
«А» обозначает высказывание «Человек ясно мыслит».
«В» — высказывание «Человек ясно говорит».
→ есть связка «если, то».
б) «Он — образованный человек и, неправда, что он не знаком с сонетами Шекспира».
— А Λ$\overline{В}$;
«А» обозначает высказывание «Он образованный человек».
«$\overline{В}$» — высказывание «Он не знаком с сонетами Шекспира».
Λ — связка «и», ¯ «не»;
в) «Если свет имеет волновую природу, то, когда он представляется в виде потока частиц (корпускул), допускается ошибка».
— (А → (В → С));
«А» — «Свет имеет волновую природу».
«В» — «Свет представляется в виде потока частиц».
«С» — «Допускается ошибка».
г) «Если вы были в Париже, то вы видели Лувр или видели Эйфелеву башню».
— (А → (В V С));
«А» — «Вы были в Париже».
«В» — «Вы видели Лувр».
«С» — «Вы видели Эйфелеву башню».
д) «Если какое-то вещество нагревать, то оно расплавится или испарится, но оно может также взорваться».
— (А → (В V С V Д));
«А» — «Вещество нагревается».
«В» — «Вещество расплавляется».
«С» — «Вещество испаряется».
«Д» — «Вещество взрывается».
Задача:
Приведем еще один простой пример перехода от искусственного языка логики к обычному языку. Пусть переменная А представляет высказывание «Теория Дарвина является научной», В — «Теория Дарвина может быть подтверждена опытными данными», С — «Теория Дарвина может быть опровергнута опытными данными». Какие содержательные высказывания выражаются формулами:
а) А → (В → С);
б) (В Λ $\overline{С}$) → $\overline{А}$;
в) ($\overline{В}$ Λ $\overline{С}$) → $\overline{А}$.
Решение:
Ответом на этот вопрос являются, соответственно, три высказывания:
а) Если теория Дарвина научна, то если она может быть подтверждена опытными данными, она может быть также опровергнута ими;
б) Если теория Дарвина может быть подтверждена опытными данными, но не может быть опровергнута ими, она не научна;
в) Если теория Дарвина не может быть подтверждена опытными данными и не может быть опровергнута ими, она не научна.
Задача:
«Кто виноват?» По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено:
1. Если Иванов невиновен или Петров виновен, то Сидоров виновен.
2. Если Иванов невиновен, то Сидоров невиновен.
Вопрос: « Виновен ли Иванов?»
Решение.
Выделим простые высказывания:
А – Иванов виновен;

B- Петров виновен;
C- Сидоров виновен.
Запишем выражения соответствующие условию задачи:
1. $(\overline{A} \vee B) \rightarrow C$;
2. $\overline{A} \rightarrow \overline{C}$.
В условии задачи говорится, что Следствием установлено, а это значит, что оба эти выражения истинны, и их можно объединить в одно с помощью операции конъюнкция. Окончательно получим:
$F(A,B,C)=((\overline{A} \vee B) \rightarrow C) \wedge (\overline{A} \rightarrow C)$.
Составим таблицу истинности (таб. 3):

A	B	C	$\overline{A}$	$(\overline{A} \vee B)$	$(\overline{A} \vee B) \rightarrow C$	$\overline{C}$	$\overline{A} \rightarrow \overline{C}$	F(A,B,C)
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Таб. 3

Решить задачу это значит указать при каких значениях А это сложное высказывание истинно. И если хотя бы в одном случае F=1 при A=0 (Иванов невиновен), то у следствия недостаточно фактов, чтобы обвинить Иванова. Из таблицы видно, что Иванов виновен в преступлении.
Задача:
Разбирается дело Батончика, Ленчика и Пончика. Кто-то из них нашел и утаил клад. На следствии каждый из них сделал по два заявления:
a) Батончик: «Я не делал этого. Пончик сделал это»
b) Ленчик: «Пончик невиновен. Батончик сделал это»
c) Пончик: « Я не делал этого. Ленчик не делал этого»
Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду. Кто из них утаил клад?
Решение.
Обозначим буквами следующие утверждения:
Б – Батончик утаил клад;
Л - Ленчик утаил клад;
П - Пончик утаил клад.
Тогда каждое из заявлений, состоящее из двух утверждений, можно представить так:
заявление Батончика- $\overline{Б}$, П
заявление Ленчика - $\overline{П}$, Б
заявление Пончика - $\overline{П}$, $\overline{Л}$.
Здесь правильный ответ можно получить, анализируя всего лишь три версии на их соответствие каждому утверждению. Анализ версий оформим в виде таблицы характера совпадений версий с заявлениями, совпадению версии с заявлением соответствует единица, в противном случае –ноль. (таб. 4)

версии	Высказывания из двух заявлений					
	Батончика		Ленчика		Пончика	
Батончик утаил	0	0	1	1	1	1
Ленчик утаил	1	0	1	0	1	0
Пончик	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**

утаил						

Таб. 4

Версия 3 соответствует условию задачи. У Батончика оба заявления верны, Ленчик дважды солгал, Пончик один раз солгал, другой – нет.

Ответ: Пончик утаил.

Задача:

Друзья попытались выяснить, собака какой породы стала победителем прошлогодней выставки. Ниже даны утверждения ребят:

Паша: победила Такса

Борис: победила либо Овчарка, либо Такса

Аня: Борис неправ

Коля: Овчарка точно не победила

Ира: Ни Лабрадор, ни Овчарка не победили

Вася: Ни Лабрадор, ни Такса не победили

Маша: Лабрадор точно не победил

Коля: Ира ошибается

Оля: победила Овчарка

Собака какой породы победила на выставке, если известно, что из девяти высказываний истины только три?

Решение:

Во всех высказываниях упоминаются только Такса, Овчарка или Лабрадор. Можно считать, что победила собака одной из этих трех пород. Введем обозначения логических высказываний: Т – победила Такса О – победила Овчарка Л – победил Лабрадор и запишем высказывания с использованием введенных обозначений. Будем проверять истинность всех девяти высказываний при истинности одного из трех предположений о победителе. Результат запишем в таблицу (таб.5).

Условие задачи		Т=1	О=1	Л=1
Паша	Т	1	0	0
Борис	$О \wedge \overline{Т} \vee \overline{О} \wedge Т$	1	1	0
Аня	$\overline{Т}$	0	1	1
Коля	$\overline{О}$	1	0	1
Ира	$\overline{Л} \wedge \overline{О}$	1	0	0
Вася	$\overline{Л} \wedge \overline{Т}$	0	1	0
Маша	$\overline{Л}$	1	1	0
Коля	$Л \vee О$	0	1	1
Оля	О	0	1	0
Количество истинных высказываний		5	6	3

Таб. 5

Ответ: Победил Лабрадор.

Задача:

Для составления цепочек разрешается использовать бусины четырех типов, обозначенные буквами У, М, К, И. Каждая цепочка должна состоять из трех бусин, при этом должны соблюдаться правила:

- любая цепочка заканчивается гласной буквой;
- после согласной буквы не может идти буква У;
- а после гласной К;
- на первом месте не может быть К или М.

Какая из цепочек построена по этим правилам?

1) МКУ 2) ИКИ 3) УМИ 4) КУУ

Решение:

Здесь правила есть логические высказывания. Требуется определить, какая из цепочек символов удовлетворяет всем высказываниям. Для каждого из ответов проверим истинность высказываний (таб. 6).

Ответы,	любая цепочка заканчивается гласной буквой	после согласной буквы не может идти буква У а после гласной К	на первом месте не может быть К или М
1) МКУ	да	нет	нет
2) ИКИ	да	нет	да
3) УМИ	да	да	да
4) КУУ	да	нет	нет

Таб. 6

Ответ: Все высказывания истинны только для ответа № 3.

1.3.3 Задания к главе

Задача 1:

Заполните таб. 1

Логические связи.

№ п\п	Название	Обозначение
1		
2		
3		
4		

5		
6		
7		
8		

Таб. 1

Задача 2:
Составить таблицу истинности для функции: f=(A∧B~B∧C)∨(C→A)
Задача 3:
Составить таблицу истинности для функции:
F=$\bar{A}$∧(B+C)
Задача 4:
Составить таблицу истинности для функции:
F=A∨B∨C
Задача 5:
Составить таблицу истинности для функции:
F=($\bar{A}$∧$\bar{B}$)∨(A∧B)
Задача 6:
Составить таблицу истинности для функции:
F=($\bar{A}$∨$\bar{B}$)∧(A∨B)
Задача 7:
Составить таблицу истинности для функции:
F=(A∧B∧C∧D)∨(A∧B∧C∧D)
Задача 8:
Три подразделения- A, B, C- торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:
1. Если A получит максимальную прибыль,то получат максимальную прибыль B и C.
2. Либо A и C получат максимальную прибыль одновременно, либо одновременно не получат.
3.Если C получило максимальную прибыль, то и B получило максимальную прибыль.
По завершении года оказалось, что одно из трех предположений ложно. Какие из названных подразделений получили максимальную прибыль?
Решение.
Выделим простые высказывания:
A – (A получит максимальную прибыль);
B – (B получит максимальную прибыль);
C – (C получит максимальную прибыль).
Запишем прогнозы, высказанные экономистами на языке математической логики:
1. F1=A → B ∧ C;
2. F2=A ∧ C ∨ $\bar{A}$ ∧ $\bar{C}$;
3. F3=C → B.
Составим таблицу истинности для F1, F2, F3.
Задача 9:
Написать формулы и составить истинностные таблицы следующих высказываний:
1: X неверно сделал расчет или, если Y просчитал задачу правильно, то и Z сделал это без ошибок.
2: Если X правильно просчитал задачу, то либо У ошибся, либо Y сделал ее верно.
Задача 10:
Написать формулы и составить истинностные таблицы следующих высказываний:
1) если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны;
2) неверно, что если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то он есть ромб;
3) четырехугольник – не ромб, или его диагонали взаимно перпендикулярны.
Задача 11:
Написать формулы следующих высказываний:

1) число X не простое и кратно пяти;
2) если X простое число, то оно не кратно пяти;
3) неверно, что X простое число или кратно пяти;
4) число X не кратно пяти, «о оно не простое;
5) неверно, что если X не простое число, то оно кратно пяти;

Задача 12:

Пусть A, B, C – следующие элементарные высказывания:
A: «a» – четное число,
B: «b»- четное число,
C: произведение чисел «a» и «b» делится на 2.
Написать формулы и построить истинностные таблицы следующих высказываний:
1) если «a» – четное число, а «b» – нечетное, то произведение чисел «a» и «b» делится на 2;
2) произведение чисел «a» и «b» делится на 2 в том и только в том случае , когда «a» или «b» четное;
3) если «a» и «b» нечетны, то их произведение не делится на 2; 4) произведение чисел «a» и «b» не делится на 2 в том и только в том случае, если «a» и «b» нечетно.
Есть ли среди этих высказываний равносильные?

Задача 13:

При составлении расписания на понедельник преподаватели просили, чтобы уроки проходили в следующем порядке: 1) математика – первым или третьим уроком; 2) история – вторым или первым; 3) литература – вторым или третьим. Можно ли удовлетворить просьбы всех трех преподавателей и каким образом, если можно?

Задача 14:

Дан фрагмент таблицы истинности (таб. 2) выражения F:

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

Таб. 2

Каким может быть выражение F?
1) $X \wedge Y \wedge Z$
2) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$
3) $X \vee Y \vee Z$
4) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

Задача 15:

При составлении расписания на понедельник учителя высказали свои пожелания по поводу первых пяти уроков.
Учитель черчения хочет иметь второй или третий урок;
Учитель математики – первый или второй урок;
Учитель информатики – третий или четвертый;
Учитель географии – третий или четвертый;
Учитель русского языка согласен только на первый или пятый уроки.
Какой вариант расписания подойдет всем учителям школы? (Обозначения: Ч – черчение, М – математика, И – информатика, Г – география, Р – русский язык.) 1) Ч М И Г Р 2) М Ч И Г Р 3) Р Ч М Г И 4) М Р Ч И Г

1.3.4 Вопросы к разделу: «Логика высказываний»

1) Основные понятия логики высказываний.
2) Обозначение истинного и ложного значений для высказываний.
3) Таблицы истинности.
4) Виды логических операций.
5) Обозначение операции дезъюнкции и таблица истинности, отображающая данную операцию.
6) Обозначение операции конъюнкции и таблица истинности, отображающая данную операцию.

7) Обозначение операции стрелка Пирса и таблица истинности, отображающая данную операцию.
8) Обозначение операции штрих Шеффнра и таблица истинности, отображающая данную операцию.
9) Обозначение операции импликации и таблица истинности, отображающая данную операцию.
10) Обозначение операции разности и таблица истинности, отображающая данную операцию.
11) Обозначение операции симметрической разности и таблица истинности, отображающая данную операцию.
12) Обозначение операции эквивалентность и таблица истинности, отображающая данную операцию.
13) Понятие тавталогии и противоречия.
14) Понятие формул высказывания с примерами.
15) Понятие логических функций.
16) Порядок выполнения логических операций.

2.Линейная алгебра

2.1 Матрицы. Основные понятия. Определитель.

Определение:

Матричная алгебра - раздел математики, изучающий понятие матрицы и действия с ними. Значительная часть математических моделей объектов и процессов записывается в достаточно простой и компактной матричной форме.

Определение

Матрицей называется совокупность n×m чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей n строк и m столбцов. Общее обозначение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - это числа, составляющие матрицу, называнмые ***эементами матрицы***.

Индекс **i** - обозначает номер строки, в которой стоит рассматриваемый элемент.

Индекс **j** - обозначает номер столбца, в котором стоит рассматриваемый элемент.

Например, элемент a_{23}находится на пересечении 2-ой строки и 3-его столбца.

Если матрица имеет n строк и m столбцов, то говорят, что матрица имеет *размерность* nxm.

Определение:

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой.***

Определение:

Матрицы одинаковой **размерности** ***равны*** тогда и только тогда, когда *равны* их соответствующие элементы.

Определение:

Матрица, состоящая из одной строки, называется ***матрицей*** **(*вектором*) – *строкой***.

Матрица, состоящая из одного столбца –***матрицей*** **(*вектором*) – *столбцом***.

Например,

$A = (a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$ – матрица–строка,

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица–столбец.

Определение:

Если n = m, то матрица называется ***квадратной***.

Квадратную матрицу, содержащую n строк и n столбцов, называют ***матрицей n–го порядка.***

Например: матрица А – матрица 2-ого порядка, а матрица В – матрица 3-его порядка.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Определение:

Элементы a_{11}; a_{22}; a_{33}; a_{44}...a_{nn} квадратной матрицы А составляют ***главную диагональ.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{31}; a_{22}; a_{13} квадрвтной матрицы А составляют ***побочную диагональ***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение:

Матрица А называется ***треугольной сверху***, если ее элементы, стоящие над главной диагональю равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & \mathbf{0} \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица А называется треугольной снизу, если ее элементы, стоящие под главной лиагональю равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ \mathbf{0} & 2 & -8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Определение:

Матрица А треугольная снизу и сверху называется ***диагональной.***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Определение:

Диагональная матрица, элементы которой равны 1, называется единичной и обозначается

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированием матрицы А называется перемена местами строк и столбцов матрицы с сохранением их номеров. Полученная таким образом матрица называется ***Транспонированной*** и обозначается $A^{т}$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{т} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Определение:

Матрица, совпадающая со своей транспонированной ($A^{т} = A$), называется ***симметрической.***

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad A^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad A^{T} = A$$

Рассмотрим пример.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Вычеркнем из матрицы А строку №1 и столбец №1, получим новую матрицу $M_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Индекс 11 у матрицы М означает, что данная матрица получена вычеркиванием 1 строки и 1 столбца.

Определение:

Минором M_{ij} называется матрица, полученная из исходной матрицы А вычеркиванием i – ой строки и j – ого столбца.

Так минор $M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ получается вычеркиванием из исходерй матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2-ой строки и 3-ого столбца.

Определение:

Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$называется запись вида: $detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$.

Определитель матрицы может обозначаться и как Δ.

Например для матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -9 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ определитель можно записать, как $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -9 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$, или как $detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -9 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$. Запись detA читается, как детерминант матрицы А.

Рассмотрим два способа вычисления определителя матрицы.

1) **Метод треугольников**.

Определитель квадратной матрицы А есть число, определяемое по методу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot в_2 \cdot c_3 + в_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot в_3 \cdot c_1 - a_3 \cdot в_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot в_1 \cdot c_3 - в_3 \cdot c_2 \cdot a_1$$

Вычислим определитель для матрицы методом треугольников: А = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$=$1 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot (-3) \cdot 1$ = -12 + 9 + 6 – 24 = -21

1 этап вычислений: перемножаем числа, стоящие на главной диагонали.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot (-3) \cdot 4 = -12$$

2 этап вычислений: формируем треугольники относительно главной диагонали и перемножаем числа, стоящие в вершинах этих треугольников. Складываем полученные результаты.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot (-3) = 9$$

3 этап вычислений: складываем результаты, полученные на первом и втором этапах.

-12 + 9 = -3

4 этап вычислений: перемножаем числа, стоящие на побочной диагонали.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(-1) \cdot (-3) \cdot (-2) = -6$$

5 этап вычислений: формируем треугольники относительно побочной диагонали и перемножаем числа, стоящие в вершинах этих треугольников. Складываем полученные результаты.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) \cdot 1 = 24$$

6 этап вычислений: складываем результаты, полученные на 4 и на 5 этапах вычислений.

-6+24=18

7 этап вычислений: вычитаем из результата, полученного на 3 этапе вычислений, результат, полученный на 6 этапе вычислений.

- 3 - 18 = - 21

Ответ: - 21

Важно: результаты, связанные с вычислением чисел, стоящих в побочной диагонали и сформированных относительно нее треугольников, *вычитаются* из результата, связанного с вычислением чисел, стоящх на главной диагонали и сформированных относительно нее треугольников.

Пример 1:

Вычислить определители для матрицы а) A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$= 1·(-2)·1+(-2)·3·7+0·2·0 - 7·(-2)·0 - 2·3·1 - 0·(-2)·1=-2 - 42 - 6= - 50

Ответ: -50

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ = 3·4 - 1·(-2) = 12+2=14

Ответ: 14

В примере (б) у матрицы B в наличии есть только главная и побочная диагонали, поэтому результат состоит из вычислений чисел, стоящих на главной и побочной диагоналях. Числа, стоящие в вершинах треугольников отсутствуют.

Факт: метод вычисления определителей методом треугольников применим, когда матрица квадратная. Если матрица не квадратная , то применяют метод разложения определителя по элементам строки или столбца.

2) Вычисление определителя методом разложения по первой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1}M_{11} + в_1(-1)^{1+2}M_{12} + c_1(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} в_2 & c_2 \\ в_3 & c_3 \end{vmatrix} - в_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & в_2 \\ a_3 & в_3 \end{vmatrix}$$

Пример 2:

Вычислить определители матриц методом разложения по первой строке

а) A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ - (-2)$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ + 0$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ = (-2)·1 - 2·3 + 2(0·1 - 3·7) = - 2 – 6 - 42= - 50

Ответ: -50

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 1|3 4| - (-2)|−5 4| +1|−5 3| = 3 - 4 +2(- 5 - 4) + (- 5 - 3) =

= - 1 – 18 - 8 = - 27

Ответ: - 27

Пример 3:

Посчитаем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Для этого из элементов, стоящих в первой строке вычтем элементы, стоящие во второй строке. И запишем в первой, изменившейся, строке получившиеся числа. После чего применим сначала расчет определителя по первой строке, а потом к оставшимся определителям пременим расчет методом треугольников.

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ = 168+56+81 – 72 – 147 – 72 = 14

$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = 45+196+64 – 84 – 40 – 168 = 13

$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ = 14 - 2·13=14 – 26 = -12

Ответ: -12

Любой определитель можно посчитать разложением как по любой строке, так и по любому столбцу.

Пример:

Вычислим определитель матрицы *A*, разложив его по элементам третьего столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(-6-2) = 16$$

Ответ: 16.

2.1.1 Задания к главе.

Задание 1.

Привести примеры
- нулевой матрицы;
- матрицы – строки и матрицы – столбца;
- квадратной матрицы и не квадратной матрицы;
- квадратной матрицы 2-ого, 3-ого, 4-ого и 5-ого порядков;
- треугольной сверху матрицы;
- треугольной снизу матрицы;
- диагональной матрицы;
- единичной матрицы.

Задание 2.

Выделить в матрицах A, B, C, D главную и побочную диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ -6 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 & 1 & 6 & -15 \\ 5 & -8 & 3 & -5 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 4 & 6 & -15 \\ 5 & -11 & 3 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Задание 3.

Выписать транспонированные матрицы для матриц A, B, C, D (смотреть предыдущее задание).

Задание 4.

Выписать для матриц A, B, C и Д все миноры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad Д = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & -6 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Задание 5.

Вычислить определители матриц A, B, C, Д, E, K, M, P методом треугольников и разложением по строке или по столбцу.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Д = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 6:

Выбрать способ вычисления матрицы и вычислить ее определитель.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Д = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \\ 8 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задание7:

Доказать, что $A^{TT} = A$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2 Арифмитические действия над матрицами.

Рассмотрим все действия с матрицами на примерах. Пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 10 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) ***Сложение матриц.***

Вычислим C=A+B. Сложение матриц это поэлементная операция сложения.

$$C=\begin{pmatrix} -2+(-1) & 0+(-4) & 4+5 \\ 1+0 & -7+(-3) & 10+0 \\ -9+1 & 0+2 & 3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 9 \\ 1 & -10 & 10 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) ***Вычитание матриц.***

Вычислим матрицы C=A - B и K=B - A. Вычитание, как и сложение, это поэлементная операция вычитания.

$$C=\begin{pmatrix} -2-(-1) & 0-(-4) & 4-5 \\ 1-0 & -7-(-3) & 10-0 \\ -9-1 & 0-2 & 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 10 \\ -10 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} -1-(-2) & -4-0 & 5-4 \\ 0-1 & -3-(-7) & 0-10 \\ 1-(-9) & 2-0 & 1-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -10 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Определение:

Суммой двух матриц $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$ одинакового порядка называют матрицу $C=\|c_{ij}\|$ такого же порядка, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, то есть $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Аналогично, разностью двух матриц $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$ одинакового порядка называют матрицу $C=\|c_{ij}\|$ такого же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B, то есть $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

3) ***Произведение матрицы на число.***

Вычислим матрицы C=2A; K= - 4B; $M=-\frac{1}{2}B$

Для этого каждый элемент исследуемых матриц умножим на нужное число. Элементы матрицы C получаются умножением элементов матрицы A на 2. Элементы матрицы K получаются умножением элементов матрицы B на - 4. А элементы матрицы M получаются умножением элементов матрицы B на $-\frac{1}{2}$.

$$C=\begin{pmatrix} -2\cdot 2 & 0\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & -7\cdot 2 & 10\cdot 2 \\ -9\cdot 2 & 0\cdot 2 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -14 & 20 \\ -18 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} -1\cdot(-4) & -4\cdot(-4) & 5\cdot(-4) \\ 0\cdot(-4) & -3\cdot(-4) & 0\cdot(-4) \\ 1\cdot(-4) & 2\cdot(-4) & 1\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16 & -20 \\ 0 & 12 & 0 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1\cdot(-0{,}5) & -4\cdot(-0{,}5) & 5\cdot(-0{,}5) \\ 0\cdot(-0{,}5) & -3\cdot(-0{,}5) & 0\cdot(-0{,}5) \\ 1\cdot(-0{,}5) & 2\cdot(-0{,}5) & 1\cdot(-0{,}5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2 & -2{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Определение:

Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$ на число К есть матрица $C = \|c_{ij}\|$ того же порядка, что и матрица А, элементы которой получены умножением соответствующих элементов матрицы А на число К, то есть $c_{ij} = K \cdot a_{ij}$.

4) ***Произведение матриц.***

Вычислим К=А·В. Вычисление продемонстрируем на примере. Итак, внимательно изучаем.

- Для вычисления элемента $к_{11}$ необходимо элементы матрицы А, стоящие в 1 строке соответственно перемножить на элементы, стоящие в 1 столбце матрицы В и результаты сложить.
- Для вычисления элемента $к_{12}$ необходимо элементы матрицы А, стоящие в 1 строке соответственно перемножить на элементы, стоящие в 2 столбце матрицы В и результаты сложить.
- Для вычисления элемента $к_{13}$ необходимо элементы матрицы А, стоящие в 1 строке соответственно перемножить на элементы, стоящие в 3 столбце матрицы В и результаты сложить. Итак, далее до элемента $к_{33}$.

$$К = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$К = \begin{pmatrix} -2\cdot(-1)+0\cdot 0+4\cdot 1 & -2\cdot(-4)+0\cdot(-3)+4\cdot 2 & -2\cdot 5+0\cdot 0+4\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+(-7)\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot(-4)+(-7)\cdot(-3)+0\cdot 2 & 1\cdot 5+(-7)\cdot 0+0\cdot 1 \\ (-9)\cdot(-1)+0\cdot 0+3\cdot 1 & (-9)\cdot(-4)+0\cdot(-3)+3\cdot 2 & (-9)\cdot 5+0\cdot 0+3\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$К = \begin{pmatrix} 2+4 & 8+8 & -10+4 \\ -1 & -4+21 & 5 \\ 9+3 & 36+6 & -45+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -6 \\ -1 & 17 & 5 \\ 12 & 42 & -42 \end{pmatrix}$$

Важно: При умножении матрицы А на матрицу В необходимо, чтоб количество элементов в строке матрицы А совпадало с количеством элементов в столбце матрицы В.

Определение:

Если количество столбцов матрицы А(к× м) равно числу строк матрицы В(м× р), то для них определена матрица размерности С(к× р), которую называют её произведением. Элементы матрицы находятся по правилу: элемент c_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i-той строки матрицы А и j-того столбца матрицы В.

Пример:

Вычислить С=А·В, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, а $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 5+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1-4 & 0 & 1+2 \\ -3+5 & 1 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2.1 Задания к главе.

Задание 1:

Найти сумму и разность матриц А и В , если $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 2:

Вычислить

C=2·A+3·B;

K= - 2·B+0,5·A;

M= - 3·A; P=A+B;

N=B – A;

D=A·B;

F=A·A^T;

G=$B^T \cdot A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 3:

Найти произведение 2·А, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 4:

Докажите, что А·В≠В·А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Задание 5:

Проверить, существуют ли произведения А·В и В·А для матриц

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 6:

Доказать, что $(A+B)^T=A^T+B^T$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Задание 7:

Доказать, что $(A \cdot B)^T=B^T \cdot A^T$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3 Обратная матрица.

Понятие обратной матрицы вводится лишь для квадратных матриц, определитель которых отличен от нуля, то есть для невырожденных квадратных матриц.

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Определение.

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы, определитель которой отличен от нуля, если справедливы равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где *E*– единичная матрица порядка *n* на *n*.

Нахождение обратной матрицы с помощью матрицы из алгебраических дополнений.

Как же находить обратную матрицу для данной?

Рассмотрим такое понятие, как алгебраическое дополнние, которое нам пригодится при вычислении обратной матрицы.

Определение:

Алгебраическим дополнением A_{ij} матрицы А называется запись вида:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где i, j - обозначение строки и столбца.

Рассмотрим на примере.

Определим алгебраические дополнения для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 - (-12)) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(10 - (-6)) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 9 = -14$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - (-6)) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7$$

Итак, после того как вычислены алгебраические дополнения, соберем из них матрицу

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -23 & -2 & -13 \\ -13 & -16 & -4 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу A_{ij}, состоящую из алгебраических дополнений. Обозначим ее как A_{ij}^{T}.

$$A_{ij}^{T} = \begin{pmatrix} -23 & -13 & -1 \\ -2 & -16 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы А методом разложения по 1 столбцу. Для этого у нас есть посчитанные алгебраические дополнения $A_{11} = -23$; $A_{12} = -2$; $A_{13} = -13$.

$$detA = 1 \cdot (-23) + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot (-13) = -23 + 4 - 39 = -58$$

На основании вычислений выше, выпишем формулу вычисления обратной матрицы:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A_{ij}^{T} \quad (*)$$

По формуле (*) вычислим обратную матрицу для матрицы А. Для этого каждый элемент транспонированной матрицы из алгебраических дополнений разделим на определитель матрицы А.

$$A^{-1} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -13 & -1 \\ -2 & -16 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{58} & \frac{13}{58} & \frac{1}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{16}{58} & -\frac{10}{58} \\ \frac{13}{58} & \frac{4}{58} & -\frac{7}{58} \end{pmatrix}$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).
2. Строим A_{ij} - матрицу из алгебраических дополнений элементов.
3. Транспонируем матрицу A_{ij}, тем самым получаем A_{ij}^{T}.
4. Умножаем каждый элемент матрицы A_{ij}^{T} на число $\frac{1}{detA}$. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы.

Свойства обратной матрицы.

1. $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$
2. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$
3. $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}^{-1}$
4. $(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{E}$
5. $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$

2.3.1 Задания к главе.

Задание 1:

Вычислить обратные матрицы к данным матрицам.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Д = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 2:

Даны матрицы . Найдите обратные матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 3:

Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Доказать, что $A \cdot A^{-1} = E$.

Задание 4:

Доказать свойства обратных матриц на примере, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4 Решение СЛАУ.

2.4.1 Решение СЛАУ методом обратной матрицы.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = k_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = k_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = k_3 \end{cases} \qquad (*)$$

Если $\{k_1; k_2; k_3\}$=0, то система линейных алгебраических уравнений называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.
Совокупность значений неизвестных переменных x,y,z, при которых все уравнения системы обращаются в тождества, называется **решением СЛАУ**.
Если существует хотя бы одно решение системы линейных алгебраических уравнений, то она называется **совместной**, в противном случае – **несовместной**.
Если СЛАУ имеет единственное решение, то она называется **определенной**. Если решений больше одного, то система называется **неопределенной**.
Эту систему (*) можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица, составленная из коэффициентов системы при неизвестных.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - вектор столбец, состоящий из неизвестных.

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ - вектор столбец, состоящий из свободных коэффициентов.

Умножив левую и правую части на матрицу A^{-1}, получим $A \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$

По определению обратной матрицы $A \cdot A^{-1}=1$. Следовательно, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}.$$

Далее находится обратная матрица, умножается на столбец из свободных коэффициентов. Итог таков, что неизвестные найдены.

Важно:

Обратная матрица к матрице А существует только при условии, что ***определитель матрицы А не равен нулю***. Поэтому при решении системы линейных уравнений методом обратной матрицы в первую очередь вычисляется определитель матрицы А. Если определитель матрицы А не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое можно найти методом обратной матрицы,

если же определитель матрицы равен нулю, то методом обратной матрицы решить эту систему нельзя.

Пример:

Решим методом обратной матрицы СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases} \qquad (**)$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решим данную систему по алгоритму:

1. Вычислим определитель матрицы А.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 48 - 3 + 18 + 8 + 20 = -25 \neq 0$$

2.Вычислим алгебраические дополнения.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 12) = 7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20 + 3) = 17$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 12) = -10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 6 = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

3.Составим матрицу из алгебраических дополнений.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 5 \\ 17 & 1 & -10 \\ -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

4.Транспонируем матрицу A_{ij}.

$$A_{ij}^T = \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

5.Запишем обратную матрицу, используя формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A_{ij}^T$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

6.Вычислим неизвестные переменные.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 17 \cdot 3 + (-10) \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 + (-10) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \begin{pmatrix} -6 + 51 - 20 \\ 7 + 3 - 10 \\ 5 - 30 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.Проверка.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 1 \\ -1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3 \\ 3 \cdot (-1) - 0 + 5 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \\ 2 = 2 \end{cases}$ - верно.

Вывод: СЛАУ (**) имеет единственное решение $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Матричный метод подходит для решения СЛАУ, в которых количество уравнений совпадает с числом неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы отличен от нуля. Если система содержит больше трех уравнений, то нахождение обратной матрицы требует значительных вычислительных усилий, поэтому, в этом случае целесообразно использовать для решения *метод Гаусса*.

2.4.2 Решение СЛАУ методом Гаусса.

Метод Гаусса прекрасно подходит для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:
- во-первых, нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;
- во-вторых, методом Гаусса можно решать не только СЛАУ, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;
- в-третьих, метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

Опишем алгоритм метода Гаусса для простейшего случая, то есть, для систем линейных алгебраических уравнений, количество уравнений в которых совпадает с количеством неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы не равен нулю.
Суть метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных переменных. Поэтому метод Гаусса также называют методом последовательного исключения неизвестных.

Если к матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ добавить в качестве 4-*ого* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую **расширенную матрицу** системы линейных уравнений. Обычно расширенную матрицу обозначают буквой *T*, а столбец свободных членов отделяют вертикальной линией от остальных столбцов, то есть,

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Если с системой линейных алгебраических уравнений произвести следующие действия:
- поменять местами два уравнения, например:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

- умножить обе части какого-либо уравнения на произвольное и отличное от нуля действительное (или комплексное) число *k*, например:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

- к обеим частям какого-либо уравнения прибавить или отнять соответствующие части другого уравнения, умноженные на произвольное число *k*, например:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

то получится эквивалентная система, которая имеет такие же решения (или также как и исходная не имеет решений).
Для расширенной матрицы системы линейных алгебраических уравнений эти действия будут означать проведение элементарных преобразований со строками:
- перестановку двух строк местами,
- умножение всех элементов какой-либо строки матрицы *T* на отличное от нуля число *k*,
- прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на произвольное число *k*.

Покажем подробное решение на примере решения СЛАУ (**) из предыдущей главы.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса.

1 Поменяем местами первое и второе уравнения.

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

2 Умножим первое уравнение на 2 и вычтем из первого уравнения второе

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

3 Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из него третье

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

4 Поменяем местами 2 и 3 уравнения

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

5 исключив поочередно переменную x и y, из последнего выразим переменную z и в обратном порядке вычислим неизвестные y и z.

$$5 \cdot z = 5 \Rightarrow z = 1$$
$$-5 \cdot y + 7 \cdot 1 = 7 \Rightarrow y = 0$$
$$x - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x = -1$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Важно:

При использовании метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений следует избегать приближенных вычислений, так как это может привести к абсолютно неверным результатам. Рекомендуем не округлять десятичные дроби. Лучше от десятичных дробей переходить к обыкновенным дробям.

2.4.3 Решение СЛАУ по формулам Крамера.

Метод Крамера – это метод решения систем линейных уравнений. Он применяется только к системам линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель отличен от нуля.
Решение системы по формулам Крамера рассмотрим на примере.
Пример:
Решить СЛАУ по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 2y - z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Запишем СЛАУ в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Алгоритм решения СЛАУ по формулам Крамера.

1 Вычислим определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ методом треугольника и обозначим его Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 6 - 1 - 0 = -7 \neq 0$$

2 Заменим первый столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ на столбец свободных коэффициентов.

Вычислим определитель новой матрицы и обозначим его Δ1.

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 2 - 4 - 0 = -7$$

3 Заменим второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ на столбец свободных коэффициентов.

Вычислим определитель новой матрицы и обозначим его Δ2.

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 - 3 - (-1) - 0 = -12 - 3 + 1 = -14$$

4 Заменим третий столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ на столбец свободных коэффициентов.

Вычислим определитель новой матрицы и обозначим его Δ3.

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 24 - (-1) - 0 = 2 - 24 + 1 = -21$$

5 По формулам Крамера $x = \frac{\Delta 1}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta 2}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta 3}{\Delta}$ вычислим значения неизвестных $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$x = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{-14}{-7} = 2; \quad z = \frac{-21}{-7} = 3;$$

6 Проверка:

$$\begin{cases} 1 + 3 = 4 \\ 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 4 \\ 1 = 1 \text{ – верно} \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Вывод: СЛАУ (*) имеет единственное решение $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.4.4 Задания к главе.

Задание 1:

Решить следующие СЛАУ методом Гаусса, методом обратной матрицы, методом Крамера.

1. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+y-3z=-2 \\ 4x+3y+2z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ x+5y-2z=-15 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-3y+4z=11 \\ 2x-y-2z=-6 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 5x-3y+4z=6 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x+3y+3z=48 \\ 2x+6y-3z=18 \\ 8x-3y+2z=21 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ 3x-6y-3z=6 \\ 5x-10y-5z=10 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x-3y+z=7 \\ x+4y-z=-5 \\ -2y+3z=8 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x-3y=5 \\ -x+4y+3z=-6 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+5z=7 \\ x+3y+16z=14 \\ -y+10z=11 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ 4y-2z=8 \\ x+3y-z=7 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 3x+4y+5z=7 \end{cases}$

Задание 2:

Определить системы, которые нельзя решить методом обратной матрицы или методом Крамера.

1. $\begin{cases} 3x+2y=-11 \\ -x+5y=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 3x+2y+2z=-7 \\ x+z=-2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-5y=14 \\ -4x+10y=5 \end{cases}$

Выбрать самостоятельно метод решения каждой системы и решить ее.

Задание 3:

На выбор: решить СЛАУ методом Крамера или методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x+y+z+k=5 \\ x+2y-z+4k=-2 \\ 2x-3y-z-5k=-2 \\ 3x+y+2z+11k=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 3x-2y+z=-1 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

2.5 Вопросы к разделу: «Линейная алгебра».

1) Понятие матрицы.
2) Что изучает матричная алгебра?
3) Понятие элемента матрицы.
4) Понятие нулевой матрицы.
5) Условие равенства матриц?
6) Понятие матрицы-строки и матрицы-столбца. Привести пример.
7) Понятие квадратной матрицы. Привести пример.
8) Понятие матрицы n-ого порядка.
9) Понятие главной и побочной диагоналей. Привести пример.
10) Определение треугольной матрицы, треугольной сверху и треугольной снизу. Привести пример.
11) Понятие диагональной матрицы. Привести пример.
12) Понятие единичной матрицы, ее обозначение.
13) Порядок матрицы, как определяется?
14) Понятие транспонированной матрицы.
15) Понятие симметрической матрицы. Привести пример.
16) Понятие минора.
17) Понятие алгебраического дополнения.
18) Определитель матрицы. Обозначение.
19) Алгоритм вычисления определителя методом треугольников.
20) Метод вычисления определителя по строке и столбцу.
21) Арифметические действия над матрицами.
22) Понятие вырожденной матрицы.
23) Условие, при котором нельзя умножать матрицу на матрицу.
24) Определение обратной матрицы.
25) Свойства обратной матрицы.
26) Алгоритм вычисления обратной матрицы.
27) Понятие СЛАУ.
28) Понятие однородной и неоднородной СЛАУ.
29) Что является решением СЛАУ?
30) Совместные и несовместные СЛАУ.
31) Определенные и неопределенные СЛАУ.
32) Запись СЛАУ в матричном виде?
33) Методы решения СЛАУ?
34) Алгоритм решения СЛАУ методом обратной матрицы.
35) Условия, когда нельзя решить СЛАУ методом обратной матрицы и методом Крамера?
36) Алгоритм решения СЛАУ методом Крамера.
37) Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса.
38) Преимущества решения СЛАУ методом Гаусса?
39) Понятие расширенной матрицы.
40) Выполнить на выбор презентацию на темы:
    - «История возникновения матриц в математике»;

- «Вклад ученых в матричную алгебру»;
- «Применение матриц в экономике»;
- «Исследование задач, решаемых с помощью матриц».

3. Список литературы.

1.Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. М.: А39 Лаборатория Базовых Знаний, 2001 – 352с.; ил.
2.Сборник задач по дискретной математике. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Электронное учебно – методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижнегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.
3.Ковалева Л.Ф. Дискретная математика в задачах: учебное пособие. – М.: МЭСИ. 2010. – 92с.